پیوست ب
مجموعه‌ها و غیره

بسیاری از فصل‌های این کتاب، با موضوعات ریاضیات گسسته سروکار داشتند. این فصل، نمادگذاری‌ها، تعریف‌ها و خواص اساسی مجموعه‌ها، رابطه‌ها، توابع، گراف‌ها و درختان را به طور کامل مرور می‌کند.

ب–۱ مجموعه‌ها

مجموعه، کلکسیونی از اشیای متمایز، به نام **اعضا** یا **عناصر** است. اگر شیء x عضو مجموعه‌ی S باشد، می‌نویسیم $x \in S$ و اگر x عضو S نباشد، می‌نویسیم $x \notin S$. مجموعه را می‌توان با نوشتن اعضای آن به صورت لیستی در داخل آکولادهای باز و بسته نشان داد. به عنوان مثال، می‌توان مجموعه‌ی S را طوری تعریف کرد که دقیقاً شامل اعداد ۱، ۲ و ۳ باشد. برای این کار می‌نویسیم $S = \{1, 2, 3\}$. چون ۲ عضو S است، می‌نویسیم $2 \in S$ و چون ۴ عضو S نیست، می‌نویسیم $4 \notin S$. مجموعه نمی‌تواند شامل اعضای تکراری باشد[1] و اعضای آن فاقد ترتیب هستند. اگر دو مجموعه‌ی A و B عناصر یکسانی داشته باشند، می‌گوییم این دو مجموعه **مساوی** هستند و می‌نویسیم $A = B$. به عنوان مثال $\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.

نمادگذاری‌های خاصی را برای مجموعه‌های متداول ارائه می‌کنیم:

- $\varnothing$، **مجموعه‌ی تهی** است، یعنی فاقد هرگونه عنصر است.
- $\mathbb{Z}$ نشان‌دهنده‌ی **مجموعه‌ی اعداد صحیح** است، یعنی $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{R}$ نشان‌دهنده‌ی **مجموعه‌ی اعداد حقیقی** است.
- $\mathbb{N}$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی **اعداد طبیعی** است، یعنی مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \ldots\}$.[2]

اگر تمام اعضای مجموعه‌ی A در B باشند، یعنی اگر از $x \in A$ نتیجه بگیریم که $x \in B$، می‌نویسیم $A \subseteq B$ و می‌گوییم A زیرمجموعه‌ی B است. اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$، می‌گوییم A **زیرمجموعه‌ی محض** B است و می‌نویسیم $A \subset B$. برای هر مجموعه‌ی A، داریم $A \subseteq A$. برای دو مجموعه‌ی A و B، داریم $A = B$ اگر و فقط اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. برای هر سه مجموعه‌ی A، B و C، اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$. برای هر مجموعه‌ی A داریم $\varnothing \subseteq A$.

---

۱. شکلی از مجموعه که دارای عناصر تکراری است، **چندمجموعه‌ای** یا **مجموعه‌ی چندتایی** نام دارد.

۲. بعضی از مولفین اعداد طبیعی را به جای صفر با یک شروع می‌کنند. در گرایش جدید، آن را با صفر نمایش می‌دهند.

گاهی مجموعه‌ها را برحسب مجموعه‌های دیگر تعریف می‌کنیم. با توجه به مجموعه‌ی A ، می‌توان $B \subseteq A$ را با بیان این خاصیت تعریف کرد که عناصر B را متمایز می‌کند. به عنوان مثال، می‌توان مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج را به صورت $\{x/2$ صحیح است و $x : x \in \mathbb{Z}\}$ تعریف کرد. کولن (:) در این نمایش، به معنای به طوری که است (گاهی از خط عمودی | استفاده می‌شود).

با توجه به دو مجموعه‌ی A و B، با استفاده از **اَعمال مجموعه‌ای** می‌توان مجموعه‌های جدیدی را تعریف کرد:

- **اشتراک** مجموعه‌های A و B به صورت زیر است:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}.$$

- **اجتماع** مجموعه‌های A و B به صورت زیر است:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B\}.$$

- **تفاضل** بین مجموعه‌های A و B به صورت زیر است:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}.$$

اَعمال مجموعه‌ها از قوانین زیر پیروی می‌کنند:

قوانین مجموعه‌ی تهی (empty set laws):

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset, \\ A \cup \emptyset &= A. \end{aligned}$$

قوانین خودتوانی (idempotency laws):

$$\begin{aligned} A \cap A &= A, \\ A \cup A &= A. \end{aligned}$$

قوانین جابه‌جایی (commutative laws):

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, \\ A \cup B &= B \cup A. \end{aligned}$$

قوانین شرکت‌پذیری (associative laws):

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

قوانین توزیع‌پذیری (distributive laws):

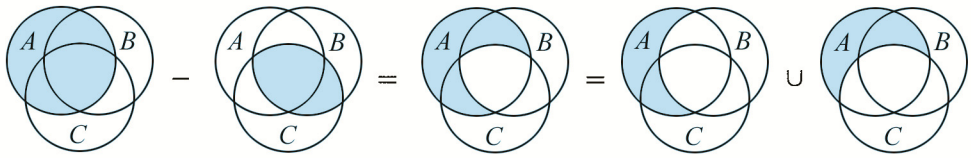
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned} \qquad \text{(ب-۱)}$$

قوانین جذب (absortion laws):

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A, \\ A \cup (A \cap B) &= A. \end{aligned}$$

قوانین دمورگان (Demorgan's laws):

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C), \\ A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C). \end{aligned} \qquad \text{(ب-۲)}$$



$$A \quad - \quad (B \cap C) \quad = \quad A - (B \cap C) \quad = \quad (A - B) \quad \cup \quad (A - C)$$

شکل ب – ۱ نمودار وَن که قانون اول دمورگان (ب – ۲) را نشان می‌دهد. هر یک از مجموعه‌های A ، B و C به صورت دایره نشان داده شدند.

قانون اول دمورگان در شکل ب–۱ با استفاده از **نمودار وَن** نمایش داده شده است. این نمودار، تصویر گرافیکی است که در آن، مجموعه‌ها به صورت ناحیه‌هایی در صفحه نمایش داده می‌شوند.

غالباً، تمام مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی بزرگ U به نام **مجموعه‌ی جهانی یا مجموعه‌ی مرجع** هستند. به عنوان مثال، اگر مجموعه‌های مختلفی را درنظربگیریم که فقط از اعداد صحیح باشند، مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ، مجموعه‌ی مرجع مناسبی است. با توجه به مجموعه‌ی مرجع U ، مکمل مجموعه‌ی A را به صورت $\overline{A} = U - A = \{x : x \in U \text{ و } x \notin A\}$ نشان می‌دهیم. برای هر مجموعه‌ی $A \subseteq U$ ، قوانین زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= A, \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset, \\ A \cup \overline{A} &= U. \end{aligned}$$

قوانین دمورگان (ب – ۲) می‌توانند با مکمل‌ها نوشته شوند. برای هر دو مجموعه‌ی $B,C \subseteq U$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \overline{B \cap C} &= \overline{B} \cup \overline{C}, \\ \overline{B \cup C} &= \overline{B} \cap \overline{C}. \end{aligned}$$

اگر دو مجموعه‌ی A و B اعضای مشترکی نداشته باشند، یعنی اگر $A \cap B = \emptyset$ ، می‌گوییم این دو مجموعه‌ی **جدا از هم**[1] هستند. کلکسیون $\mathcal{S} = \{S_i\}$ از مجموعه‌های غیرتهی، **افرازی** از مجموعه‌ی S را نشان می‌دهد، اگر:

- مجموعه‌ها **دو به دو جدا از هم** باشند، یعنی $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ و از $i \neq j$ نتیجه می‌شود که $S_i \cap S_j = \emptyset$ و
- اجتماع آن‌ها S است، یعنی:

$$S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i.$$

به عبارت دیگر، $\mathcal{S}$ در صورتی افرازی از S را ایجاد می‌کند که هر عنصر S دقیقاً در یک $S_i \in \mathcal{S}$ ظاهر شود.

تعداد عناصر در مجموعه را **عدد اصلی**[2] (یا **اندازه‌ی**) مجموعه می‌گویند و با $|S|$ نشان می‌دهیم. عدد اصلی دو مجموعه در صورتی یکسان است که عناصر آن‌ها تناظر یک به یک داشته باشند. عدد اصلی مجموعه‌ی تهی، برابر با $|\emptyset| = 0$ است. اگر عدد اصلی مجموعه، عدد طبیعی باشد، می‌گوییم مجموعه **متناهی** است، وگرنه **نامتناهی** است. مجموعه‌ی نامتناهی که بتواند با اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ تناظر یک به یک داشته باشد، **نامتناهی شمارش‌پذیر**[3] (**شمارا**) نام دارد، وگرنه **شمارش‌ناپذیر** (**ناشمارا**) است. مقادیر صحیح $\mathbb{Z}$ شمارا هستند، اما اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ شمارش‌ناپذیرند.

1. Disjoint 2. Cardinality 3. Infinite conutable

برای هر دو مجموعه‌ی متناهی A و B ، همانی زیر را داریم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \qquad \text{(ب – ۳)}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که:

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|.$$

اگر A و B جدا از هم باشند، آن‌گاه $|A \cap B| = 0$ و در نتیجه $|A \cup B| = |A| + |B|$. اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $|A| \leq |B|$.

مجموعه‌ی متناهی n عنصری را گاهی **مجموعه‌ی n تایی** می‌نامند. مجموعه‌ی ۱ تایی را **مجموعه‌ی یکه** (یک عضوی) می‌گویند. زیرمجموعه‌ای از k عنصر یک مجموعه را گاهی **زیرمجموعه‌ی k تایی** می‌گویند.

مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های S ، از جمله مجموعه‌ی تهی و خود S را با 2^S نشان می‌دهیم و **مجموعه‌ی توانی**[1] S نام دارد. به عنوان مثال $2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. عدد اصلیِ مجموعه‌ی توانیِ مجموعه‌ی متناهی S ، برابر است با $2^{|S|}$ (تمرین ب–۱–۵ را ببینید).

گاهی با **ساختارهای شبه‌مجموعه**[2] سروکار داریم که در آن، عناصر مرتب هستند. **زوج مرتب**[3] دو عنصر a و b به صورت (a, b) نشان داده می‌شود و می‌تواند به طور رسمی به صورت مجموعه‌ی $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ نمایش داده شود. بنابراین، زوج مرتب (a, b) برابر با (b, a) نیست.

حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B که با $A \times B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای از تمام زوج‌های مرتب است که اولین عنصر این زوج، عنصری از A و دومی عنصری از B است:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ و } b \in B\}.$$

به عنوان مثال:

$$\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}.$$

وقتی A و B مجموعه‌های متناهی باشند، عدد اصلی حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها برابر است با:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|. \qquad \text{(ب – ۴)}$$

حاصل‌ضرب دکارتی n مجموعه‌ی $A_1, A_2, \ldots, A_n$، مجموعه‌ی **n تایی** زیر است:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

که اگر تمام مجموعه‌های A_i متناهی باشند، عدد اصلی آن عبارت است از:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

حاصل‌ضرب دکارتی n تایی را بر روی مجموعه‌ی A به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{n بار}},$$

که اگر A متناهی باشد، عدد اصلی آن برابر است با $|A^n| = |A|^n$. یک n تایی را می‌توان دنباله‌ی متناهی به طول n دانست.

1. Power set 2. Setlike structures 3. Ordered pair

تمرین‌ها

تمرین ب-۱-۱: نمودارهای وَن را رسم کنید که اولین قانون توزیع‌پذیری (ب – ۱) را توصیف کند.

تمرین ب-۱-۲: تعمیم قانون دمورگان را به هر کلکسیونی از مجموعه‌ها اثبات کنید:

$$\begin{aligned}\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}\,,\\ \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\,.\end{aligned}$$

★ **تمرین ب-۱-۳:** تعمیم معادله‌ی (ب – ۳) را ثابت کنید که **اصل شمول و عدم شمول**[1] نام دارد:

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =\\ &\quad |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|\\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots && \text{(تمام دوتایی‌ها)}\\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots && \text{(تمام چندتایی‌ها)}\\ &\qquad\qquad \vdots\\ &\quad + (-1)^{n-1}\,|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\,.\end{aligned}$$

تمرین ب-۱-۴: نشان دهید که مجموعه‌ای از اعداد طبیعی فرد، شمارش‌پذیراست.

تمرین ب-۱-۵: نشان دهید که برای هر مجموعه‌ی متناهی S ، مجموعه‌ی توانی 2^S دارای $2^{|S|}$ عنصر است (یعنی، $2^{|S|}$ زیرمجموعه‌ی جدا از هم از S وجود دارد).

تمرین ب-۱-۶: یک تعریف استقرایی برای n تایی‌ها ارائه دهید. برای این کار، تعریف نظریه‌ی مجموعه‌ها را برای زوج مرتب بسط دهید.

ب–۲ رابطه‌ها (relations)

رابطه‌ی دودویی[2] R بر روی دو مجموعه‌ی A و B ، زیرمجموعه‌ای از ضرب دکارتی $A \times B$ است. اگر $(a,b) \in R$ ، گاهی می‌نویسیم $a\ R\ b$. وقتی می‌گوییم R یک رابطه‌ی دودویی بر روی مجموعه‌ی A است، معنایش این‌است‌که R زیرمجموعه‌ی $A \times A$ است. برای مثال، رابطه‌ی **کوچک‌تر از** در اعداد طبیعی، مجموعه‌ی $\{(a,b): a,b \in \mathbb{N}, a<b\}$ است. رابطه‌ی n تایی بر روی مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ، زیرمجموعه‌ی $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ است.

رابطه‌ی دودویی $R \subseteq A \times A$ **بازتابی**[3] (انعکاسی) است اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a\ R\ a$. به عنوان مثال، "=" و "≤" رابطه‌ی بازتابی روی $\mathbb{N}$ هستند، ولی "<" نیست. رابطه‌ی **R متقارن** است اگر برای تمام $a,b \in A$ داشته باشیم:

$$a\ R\ b \text{ implies } b\ R\ a$$

برای مثال، "=" متقارن است، ولی "<" و "≤" نیستند. رابطه‌ی **R** در صورتی **متعدی** (تراگذری) است که برای تمام $a,b,c \in A$ داشته باشیم:

$$a\ R\ b \text{ and } b\ R\ c \text{ imply } a\ R\ c$$

برای مثال، رابطه‌های "<" ، "≤" و "=" متعدی هستند، ولی رابطه $R = \{(a,b) : a,b \in \square, a = b-1\}$ نیست، زیرا $3\ R\ 4$ و $4\ R\ 5$ دلالت نمی‌کند که $3\ R\ 5$.

1. principle of inclusion and exclusion 2. binary relation 3. reflexive

رابطه‌ای که بازتابی، متقارن و متعدی باشد، **رابطه‌ی هم‌ارزی**[1] است. به عنوان مثال، "=" یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی اعداد طبیعی است، ولی "<" نیست. اگر **R** یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی مجموعه‌ی A باشد، آن‌گاه برای $a \in A$ **کلاس هم‌ارزی**[2] a ، مجموعه‌ی $[a] = \{b \in A : a\ R\ b\}$ است، یعنی، مجموعه‌ای از تمام عناصر هم‌ارز با a . برای مثال، اگر $a + b$ یک عدد صحیح است و $R = \{(a,b) : a,b \in \square\}$، آن‌گاه R رابطه‌ی هم‌ارزی است، زیرا $a + a$ زوج است (بازتابی)، اگر $a + b$ زوج باشد، نتیجه می‌شود که $b + a$ زوج است (متقارن) و اگر $a + b$ زوج باشد و $b + c$ نیز زوج باشد، نتیجه می‌شود که $a + c$ زوج است (متعدی). دسته‌ی هم‌ارزی ۴، برابر است با $[4] = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ و دسته‌ی هم‌ارزی ۳، برابر است با $[3] = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. قضیه‌ی اساسی کلاس هم‌ارزی به صورت زیر است.

قضیه‌ی ب – ۱ (رابطه‌ی هم‌ارزی، همان افراز است)

کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی هم‌ارزی R بر روی مجموعه‌ی A ، افرازی از A را تشکیل می‌دهد و هر افراز A ، یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی A را تعیین می‌کند که برای آن، مجموعه‌ها در این افراز، کلاس‌های هم‌ارزی هستند.

اثبات: برای بخش اول اثبات، باید نشان دهیم که کلاس‌های هم‌ارزی R ، مجموعه‌های **دو به دو جدا از هم** هستند که اجتماع آن‌ها، A است. چون R بازتابی است، $a \in [a]$ و در نتیجه کلاس‌های هم‌ارزی غیرتهی هستند. علاوه‌براین، چون هر عنصر $a \in A$ به کلاس هم‌ارزی $[a]$ تعلق دارد، اجتماع این کلاس‌های هم‌ارزی، برابر با A است. اکنون باید نشان دهیم که کلاس‌های هم‌ارزی دو به دو جدا از هم هستند، یعنی، اگر دو کلاس هم‌ارزی $[a]$ و $[b]$ عضو مشترک c را داشته باشند، آن‌ها در واقع یک مجموعه هستند. فرض کنید $a\,R\,c$ و $b\,R\,c$. بنا به خاصیت تقارن داریم $c\ R\ b$ و بنا به خاصیت تراگذری داریم $a\,R\,b$. بنابراین، برای هر عنصر دلخواه $x \in [a]$، داریم $x\ R\ a$ و بنا به خاصیت تراگذری داریم $x\ R\ b$ و در نتیجه $[a] \subseteq [b]$. به طور مشابه، $[b] \subseteq [a]$ و در نتیجه $[a] = [b]$.

برای بخش دوم اثبات، فرض کنید $\mathscr{A} = \{A_i\}$ افرازی از A باشد و تعریف کنید:

$$R = \{(a,b) : b \in A_i, a \in A_i \text{ وجود دارد، به طوری که } i\}$$

ادعا می‌کنیم که R رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی A است. خاصیت بازتابی برقرار است، زیرا از $a \in A_i$ نتیجه می‌گیریم که $a\ R\ a$. خاصیت تقارن برقرار است، زیرا، اگر $a\ R\ b$ ، آن‌گاه a و b در مجموعه‌ی A_i قرار دارند و در نتیجه $b\ R\ a$. اگر $a\ R\ b$ و $b\ R\ c$ ، آن‌گاه هر سه عنصر در مجموعه‌ی A_i قرار دارند و در نتیجه $a\ R\ c$ و خاصیت بازتابی برقرار است. برای این‌که ببینید مجموعه‌های داخل افراز، کلاس‌های هم‌ارزی R هستند، مشاهده می‌کنید که اگر $a \in A_i$، آن‌گاه از $x \in [a]$ نتیجه می‌شود که $x \in A_i$ و از $x \in A_i$ نتیجه می‌شود که $x \in [a]$. ■

رابطه‌ی دودویی R بر روی مجموعه‌ی A **پادمتقارن**[3] است اگر:

$$a\,R\,b \text{ and } b\,R\,a \text{ imply } a = b\,.$$

1. Equivalence relation 2. Equivalence class 3. Antisymmetric

به عنوان مثال، رابطه‌ی "$\leq$" روی اعداد طبیعی، پادمتقارن است، زیرا از $a \leq b$ و $b \leq a$ نتیجه می‌شود که $a = b$. رابطه‌ای که بازتابی، پادمتقارن و تراگذری باشد، **مرتب جزیی**[1] است و مجموعه‌ای که ترتیب جزیی روی آن تعریف می‌شود، **مجموعه‌ی مرتب جزیی** نام دارد. به عنوان مثال، رابطه‌ی **فرزند بودن**، یک ترتیب جزیی روی مجموعه‌ای از افراد است (اگر هر یک از افراد را نوه‌های خودشان در نظر بگیریم).

در **مجموعه‌ی مرتب جزیی** A، ممکن است هیچ عنصر **بیشینه‌ای** مثل a وجود نداشته باشد به طوری که برای تمام $b \in A$ داشته باشیم $b \; R \; a$. در عوض، ممکن است چندین عنصر **ماکسیمال** a وجود داشته باشد که برای هیچ $b \in A$ که در آن $b \neq a$، رابطه‌ی $a \; R \; b$ برقرار باشد. برای مثال، در کلکسیونی از جعبه‌هایی با اندازه‌های مختلف، ممکن است چندین جعبه‌ی بیشینه وجود داشته باشند که در داخل جعبه‌ی دیگر جا نشود، ولی هیچ جعبه‌ی بیشینه‌ای وجود نداشته باشد که هر جعبه‌ی دیگری در آن جا شود[2].

رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی A یک **رابطه‌ی کلی**[3] است اگر برای تمام $a,b \in A$، داشته باشیم $a \; R \; b$ یا $b \; R \; a$ (یا هر دو)، یعنی، اگر هر جفتی از عناصر A ، با R ارتباط داشته باشد. برای مثال، رابطه‌ی "$\leq$" یک ترتیب کلی در اعداد طبیعی است، اما رابطه‌ی فرزندبودن، یک ترتیب کلی بر روی مجموعه‌ی افراد نیست، زیرا افرادی وجود دارند که هیچ‌کدام از آن‌ها فرزند دیگری نیست. **رابطه‌ی کلی‌ای** که تراگذری باشد، ولی الزاماً بازتابی و پادمتقارن نباشد، **پیش‌ترتیب کلی**[4] نام دارد.

تمرین‌ها

تمرین ب-۲-۱: ثابت کنید رابطه‌ی زیرمجموعه‌ی "$\subseteq$" بر روی تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}$ ، ترتیب جزیی است ولی ترتیب کلی نیست.

تمرین ب-۲-۲: نشان دهید که برای هر عدد صحیح مثبت n ، رابطه‌ی هم‌ارزی به سنج n ، رابطه‌ی هم‌ارزی روی اعداد صحیح است (اگر عدد صحیح q وجود داشته باشد که $a - b = qn$ ، می‌گوییم $a \equiv b \pmod{n}$). در کدام کلاس‌های هم‌ارزی، این رابطه، مقادیر صحیح را افراز می‌کند؟

تمرین ب-۲-۳: نمونه‌هایی از رابطه‌ها را ارائه دهید که:

الف. بازتابی و متقارن هستند ولی تراگذری نیستند.

ب. بازتابی و تراگذری هستند ولی متقارن نیستند.

پ. متقارن و تراگذری هستند ولی بازتابی نیستند.

تمرین ب-۲-۴: فرض کنید S یک مجموعه‌ی متناهی و R یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی $S \times S$ باشد، نشان دهید که اگر R پادمتقارن باشد، آن‌گاه کلاس‌های هم‌ارزی S نسبت به R ، یکه هستند.

تمرین ب-۲-۵: پروفسور نارسیسوس (Narcissus) ادعا می‌کند که اگر رابطه‌ی R متقارن و تراگذری باشد، آن‌گاه بازتابی نیز هست. اثبات زیر را ارائه می‌کند. بنا به خاصیت تقارن، از $a \; R \; b$ نتیجه می‌شود که $b \; R \; a$. بنابراین از خاصیت تراگذری نتیجه می‌شود که $a \; R \; a$. آیا پروفسور درست می‌گوید؟

---

1. Partial order

۲. برای این‌که رابطه‌ی جاشدن در داخل، مرتب جزیی باشد، باید فرض کنیم جعبه در داخل خودش جا می‌شود.

3. Total relation

4. Total preorder

ب–۳ توابع

با توجه به دو مجموعه‌ی A و B ، **تابع** f یک رابطه‌ی دودویی بر روی A و B است، به طوری که برای تمام $a \in A$، دقیقاً یک $b \in B$ وجود دارد که $(a,b) \in f$. مجموعه‌ی A را **دامنه‌ی f**[1] و مجموعه‌ی B را **هم‌دامنه**[2] یا **برد** f می‌گویند. گاهی می‌نویسیم $f : A \to B$ و اگر $(a,b) \in f$، می‌نویسیم $b = f(a)$ ، زیرا b به طور یکتا با انتخاب a تعیین می‌شود.

از نظر شهودی، تابع f عنصری از B را به هر عنصر A نسبت می‌دهد. هیچ عنصری از A به دو عنصر مختلف B نسبت داده نمی‌شود، اما یک عنصر از B می‌تواند به دو عنصر مختلف از A نسبت داده شود. برای مثال، رابطه‌ی دودویی زیر را درنظربگیرید:

$$f = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ and } b = a \bmod 2\}$$

این رابطه، تابع $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ است، زیرا برای هر عدد طبیعی a ، دقیقاً یک مقدار b در $\{0, 1\}$ وجود دارد که $b = a \bmod 2$. برای این مثال، $0 = f(0)$ ، $1 = f(1)$ و $0 = f(2)$ و غیره. اکنون رابطه‌ی دودویی زیر را در نظر بگیرید:

$$g = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ and } a + b \text{ is even}\}$$

این رابطه، یک تابع نیست، زیرا $(1, 3)$ و $(1, 5)$ در g قرار دارند و در نتیجه برای انتخاب $a = 1$ ، دقیقاً یک b وجود ندارد که $(a,b) \in g$ باشد.

با توجه به تابع $f : A \to B$، اگر $b = f(a)$ ، می‌گوییم a **آرگومان**[3] f و b **مقدار** f در a است. تابع را می‌توان با بیان مقدار هر عنصر دامنه‌ی آن تعریف کرد. برای مثال، می‌توان تابع $f(n) = 2n$ را برای $n \in \mathbb{N}$ تعریف کرد که به معنای این‌است‌که $f = \{(n,2n) : n \in \mathbb{N}\}$. دو تابع f و g در صورتی مساوی هستند که دامنه و برد یکسانی داشته باشند و برای تمام a موجود در دامنه، $f(a) = g(a)$.

دنباله‌ی متناهی[4] به طول n ، تابعی به نام f است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ای از n مقدار صحیح $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ است. اغلب، دنباله‌ی متناهی را با توجه به مقادیر آن نشان می‌دهیم: $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1) \rangle$.

دنباله‌ی نامتناهی[5]، تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است. برای مثال، دنباله‌ی فیبوناچی که با رابطه‌ی بازگشتی (۳–۳۱) تعریف شد، دنباله‌ی نامتناهی $\langle 0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots \rangle$ است.

وقتی دامنه‌ی تابع f ، حاصل‌ضرب دکارتی باشد، غالباً پرانتزهای اضافی اطراف آرگومان f را حذف می‌کنیم. برای مثال، اگر داشتیم $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$، به جای این‌که بنویسیم $b = f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$، می‌نوشتیم $b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. هر a_i را نیز آرگومان تابع f می‌نامیم، گرچه از نظر تکنیکی تنها آرگومان f ، n تایی $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ است.

اگر $f : A \to B$ یک تابع و $b = f(a)$ باشد، آن‌گاه گاهی می‌گوییم b **تصویر**[6] a تحت f است. تصویر مجموعه‌ی $A' \subseteq A$ تحت f ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(A') = \{b \in B : b = f(a) \text{ for some } a \in A'\}.$$

1. Domain 2. Codomain 3. Argument 4. Finite sequence 5. Infinite sequence 6. Image

بُرد f ، تصویر دامنه‌اش، یعنی f(A) است. برای مثال، بُرد تابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ که توسط $f(n)=2n$ تعریف می‌شود، برابر است با $f(\mathbb{Z})=\{m:m=2n$ داریم $n\in\mathbb{Z}$ برای $\}$، به عبارت دیگر، برابر با مجموعه‌ای از مقادیر صحیح زوج نامنفی است.

تابع در صورتی پوشا[1] است که برد آن، برابر با هم‌دامنه‌اش باشد. برای مثال، تابع $f(n)=\lfloor n/2\rfloor$ تابع پوشایی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ است، زیرا هر عنصر در $\mathbb{N}$ ، به عنوان مقدار f برای یک آرگومان ظاهر می‌شود. برعکس، تابع $f(n)=2n$ تابع پوشایی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ نیست، زیرا هیچ آرگومان f نمی‌تواند مقدار ۳ را تولید کند. با این وجود تابع $f(n)=2n$ ، تابع پوشایی از اعداد طبیعی به اعداد زوج است. تابع پوشای $f:A\to B$ گاهی نگاشت A **بر روی**[2] B توصیف می‌شود. وقتی از کلمه‌ی بر روی برای f استفاده می‌کنیم، به معنای این است که f پوشا است.

تابع $f:A\to B$ در صورتی **یک‌سو**[3] است که آرگومان‌های متمایز f ، مقادیر متمایزی تولید کنند، یعنی اگر $a\neq a'$، آن‌گاه $f(a)\neq f(a')$. برای مثال، تابع $f(n)=2n$ ، تابع **یک‌سو** از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ است، زیرا هر عدد زوج b ، تصویر تحت f از حداکثر یک عنصر دامنه، یعنی b/2 است. تابع $f(n)=\lfloor n/2\rfloor$ یک به یک نیست، زیرا مقدار ۱ توسط دو آرگومان تولید می‌شود: ۲ و ۳. **یک‌سویی** گاهی **تابع یک به یک** نامیده می‌شود.

تابع $f:A\to B$ در صورتی **دوسو**[4] است که **یک به یک** و **پوشا** باشد. برای مثال، تابع $f(n)=(-1)^n\lceil n/2\rceil$ تابعی دوسو از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{Z}$ است:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \to & 0\,, \\ 1 & \to & -1\,, \\ 2 & \to & 1\,, \\ 3 & \to & -2\,, \\ 4 & \to & 2\,, \\ & \vdots & \end{array}$$

این تابع به این دلیل یک به یک است که هیچ عنصر $\mathbb{Z}$ ، تصویر بیش از یک عنصر از $\mathbb{N}$ نیست. به این دلیل پوشا است که هر عنصر $\mathbb{Z}$ به عنوان تصویر عنصری از $\mathbb{N}$ است. بنابراین، تابع دوسو است. تابع دوسو را گاهی **تناظر یک به یک**[5] گویند، زیرا عناصر موجود در دامنه و برد یک زوج را تشکیل می‌دهند. تابع دوسو از مجموعه‌ی A به خودش، گاهی **جایگشت**[6] نامیده می‌شود.

وقتی تابع f دوسو است، **وارون** f^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود (از راست به چپ بخوانید):

$$f^{-1}(b)=a \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad f(a)=b$$

برای مثال، وارون تابع $f(n)=(-1)^n\lceil n/2\rceil$ به صورت زیر است:

$$f^{-1}(m)=\begin{cases}2m & m\geq 0 \text{ اگر} \\ -2m-1 & m<0 \text{ اگر}\end{cases}$$

1. Surjection 2. Onto 3. Injection 4. Bijection 5. One-to-one correspondence
6. Permutation

تمرین‌ها

تمرین ب-۳-۱: فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی باشند و $f: A \to B$ یک تابع باشد. نشان دهید که:

الف. اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه $|A| \le |B|$.

ب. اگر f پوشا باشد، آن‌گاه $|A| \ge |B|$.

تمرین ب-۳-۲: آیا وقتی که دامنه و برد تابع $f(x) = x+1$ برابر با $\mathbb{N}$ باشد، دوسو است یا خیر؟ آیا وقتی دامنه و برد آن $\mathbb{Z}$ است، دوسو است؟

تمرین ب-۳-۳: یک تعریف طبیعی برای وارون رابطه‌ی دودویی ارائه دهید، به طوری که اگر رابطه‌ای یک تابع دوسو است، وارون رابطه‌ای آن، وارون تابعی آن باشد.

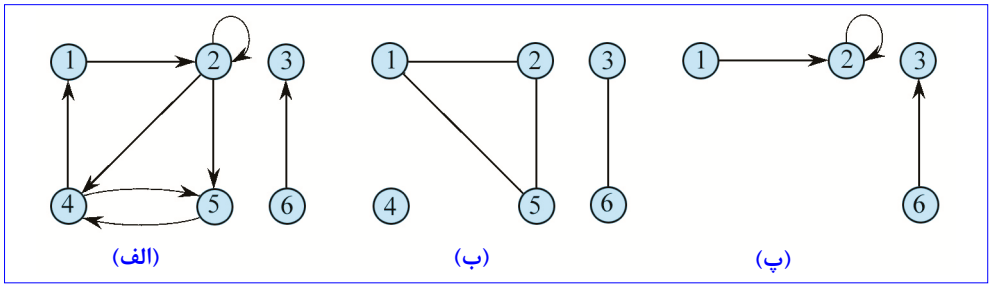
★ **تمرین ب-۳-۴:** یک تابع دوسو از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ارائه دهید.

ب-۴ گراف‌ها

این بخش، دو نوع گراف را ارائه می‌دهد: جهت‌دار و بدون جهت. تعریف‌هایی که در بعضی متون آمده است، با آن‌چه که در این‌جا می‌بینید فرق می‌کند، اما در اغلب موارد تفاوت‌های آن‌ها زیاد نیست. بخش ۲۰-۱ نشان می‌دهد که گراف‌ها را چگونه می‌توان در حافظه‌ی کامپیوتر نمایش داد.

گراف جهت‌دار (یا **دیاگراف**) G ، زوج (V, E) است که V مجموعه‌ی متناهی و E یک رابطه‌ی دودویی بر روی V است. مجموعه‌ی V را **مجموعه‌ی رأس** G و عناصرش را رئوس می‌نامند. مجموعه‌ی E را **مجموعه‌ی یال** G می‌نامند و عناصر آن **یال** نام دارند. شکل ب – ۲ (الف) نمایش تصویری گراف جهت‌دار بر روی مجموعه‌ی رأس $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. در شکل، رئوس با دایره و یال‌ها با پیکان نشان داده شدند. توجه کنید که **خودحلقه‌ها (self-loop)** یعنی یال‌هایی از یک رأس به خودش، امکان‌پذیر است.

در **گراف جهت‌دار** $G = (V, E)$ ، مجموعه‌ی یال E شامل زوج‌های نامرتب از رئوس است. یعنی یال، مجموعه‌ی $\{u, v\}$ است که در آن $u, v \in V$ و $u \ne v$. طبق قرارداد، به جای نماد $\{u, v\}$ از نماد (u, v) برای یال استفاده می‌کنیم و (u, v) و (v, u) یک یال در نظر گرفته می‌شوند. در گراف بدون جهت، وجود **خودحلقه‌ها** ممنوع است و در نتیجه هر یال شامل دقیقاً دو رأس جدا از هم است. شکل ب – ۲ (ب) نمایش تصویری گراف بدون جهت بر روی مجموعه‌ی رأس $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.



شکل ب – ۲ گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت. (الف) گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ که $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$. یال $(2, 2)$ خودحلقه است. (ب) گراف بدون جهت $G = (V, E)$ که $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$. رأس 4 جدا شده و منفرد است. (پ) زیرگراف مربوط به گراف قسمت (الف) که ناشی از مجموعه‌ی رأس $\{1, 2, 3, 6\}$ است.

بسیاری از تعاریف مربوط به گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت یکسان هستند، گرچه بعضی از اصطلاحات در دو گراف، معنای متفاوتی دارند. اگر (u, v) یالی در گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ باشد، می‌گوییم (u, v) از رأس u **خارج می‌شود** و به رأس v **وارد می‌شود**. برای مثال، یال‌های خروجی از رأس ۲ در شکل ب – ۲ (الف) عبارتنداز $(2, 2)$ ، $(2, 4)$ و $(2, 5)$. یال‌های ورودی رأس ۲ عبارتنداز $(1, 2)$ و $(2, 2)$. اگر (u, v) یالی در گراف بدون جهت $G = (V, E)$ باشد، می‌گوییم (u, v) با رئوس u و v تلاقی دارد. در شکل ب – ۲ (ب)، یال‌های متلاقی با رأس 2 عبارتنداز $(1, 2)$ و $(2, 5)$.

اگر (u, v) یالی در گراف $G = (V, E)$ باشد، می‌گوییم رأس v **همجوار** رأس u است. وقتی گراف بدون جهت باشد، **رابطه‌ی همجواری** متقارن است. وقتی گراف جهت‌دار باشد، رابطه‌ی همجواری الزاماً متقارن نیست. اگر v همجوار u در گراف جهت‌دار باشد، گاهی می‌نویسیم $u \to v$. در قسمت‌های (الف) و (ب) در شکل ب – ۲، رأس 2 همجوار رأس 1 است، زیرا یال $(1, 2)$ به هر دو گراف تعلق دارد. رأس 1 همجوار رأس 2 در شکل ب – ۲ (الف) نیست، زیرا یال $(2, 1)$ متعلق به گراف نیست.

درجه‌ی[1] یک رأس در گراف بدون جهت، برابر با تعداد یال‌هایی است که با آن رأس تلاقی می‌کنند. برای مثال، رأس ۲ در شکل ب – ۲ (ب) دارای درجه‌ی ۲ است. رأسی که درجه‌ی آن صفر است، مثل رأس 4 در شکل ب – ۲ (ب)، **منفرد است**[2]. در گراف جهت‌دار، **درجه‌ی خروجی** یک رأس، برابر با تعداد یال‌هایی است که از آن خارج می‌شوند و **درجه‌ی ورودی** رأس، برابر با تعداد یال‌هایی است که به آن وارد می‌شوند. درجه‌ی رأس در گراف جهت‌دار، برابر با مجموع درجه‌های ورودی و خروجی آن است. رأس ۲ در شکل ب – ۲ (الف) دارای درجه‌ی ورودی ۲، درجه‌ی خروجی ۳ و درجه‌ی ۵ است.

مسیری به طول k از رأس u به رأس u' در گراف $G = (V, E)$ ، دنباله‌ی $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ از رئوس است، به طوری که $u = v_0$ و $u' = v_k$ و برای $i = 1, 2, \ldots, k$ ، داریم $(v_{i-1}, v_i) \in E$. **طول مسیر** برابر با تعداد یال‌ها در آن مسیر است. مسیر **شامل** رئوس $v_0, v_1, \ldots, v_k$ و یال‌های $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$ است (همیشه مسیری به طول صفر از u به u وجود دارد). اگر مسیر p از u به u' وجود داشته باشد، می‌گوییم u' از u **از طریق** p قابل دسترسی است که اگر G جهت‌دار باشد، گاهی می‌نویسیم $u \overset{p}{\leadsto} u'$. یک مسیر در صورتی **ساده** است که تمام رئوس موجود در مسیر، جدا از هم باشند. در شکل ب – ۲ (الف)، مسیر $\langle 1,2,5,4 \rangle$ مسیر ساده‌ای به طول ۳ است. مسیر $\langle 2,5,4,5 \rangle$ ساده نیست. **زیرمسیری**[3] از مسیر $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ ، زیردنباله‌ی **پیوسته‌ای** از رئوس آن است. یعنی، برای هر $0 \le i \le j \le k$ ، زیردنباله‌ای از رئوس $\langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ زیرمسیری از p است.

در گراف جهت‌دار، مسیر $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ یک **دور**[4] ایجاد می‌کند اگر $v_0 = v_k$ و مسیر حداقل شامل یک یال باشد. دور در صورتی ساده است که $v_1, v_2, \ldots, v_k$ متمایز باشند. خودحلقه، دوری به طول ۱ است. دو مسیر $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ و $\langle v'_0, v'_1, v'_2, \ldots, v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ در صورتی تشکیل دور یکسان می‌دهند که مقدار صحیح j وجود داشته باشد که برای $i = 0, 1, \ldots, k-1$ داشته باشیم $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$. در شکل ب – ۲ (الف)،

1. Degree 2. Isolated 3. Subpath 4. Cycle

مسیر $\langle 1,2,4,1\rangle$ دوری یکسان با مسیرهای $\langle 2,4,1,2\rangle$ و $\langle 4,1,2,4\rangle$ ایجاد می‌کند. این دور، ساده است، ولی دور $\langle 1,2,4,5,4,1\rangle$ ساده نیست. دور $\langle 2,2\rangle$ که توسط یال $(2, 2)$ ایجاد می‌شود، خودحلقه است. گراف جهت‌دار بدون خودحلقه، **ساده** است. در گراف بدون جهت، مسیر $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k\rangle$ ، در صورتی **دور (ساده‌ای)** را ایجاد می‌کند که $k > 0$ ، $v_0 = v_k$ و تمام یال‌ها روی مسیر متمایز باشند. برای مثال، در شکل ب – ۲ (ب) مسیر $\langle 1,2,5,1\rangle$ یک دور است. گراف فاقد دور را **گراف بدون دور**[1] می‌نامند.

گراف بدون جهت، **همبند**[2] است اگر هر رأس آن از طریق تمام رأس‌های دیگر قابل دسترسی باشد. **مولفه‌های همبند**[3] گراف، کلاس‌های هم‌ارزی رئوس تحت رابطه‌ی **قابل دسترس است از** هستند. گراف شکل ب – ۲ (ب) سه مولفه‌ی همبند دارد: $\{1, 2, 5\}$ ، $\{3, 6\}$ و $\{4\}$. هر رأس در $\{1, 2, 5\}$ از هر رأس دیگر در $\{1, 2, 5\}$ قابل دسترسی است. گراف بدون جهت در صورتی همبند است که دقیقاً یک مولفه‌ی همبند داشته باشد. یال‌های مولفه‌ی همبند آن‌هایی هستند که فقط با رئوس این مولفه تلاقی می‌کنند. به عبارت دیگر، یال (u, v) در صورتی یالی از یک مولفه‌ی همبند است که u و v رئوس این مولفه باشند.

گراف جهت‌دار در صورتی **همبند قوی**[4] است که هر دو رأس آن از یکدیگر قابل دسترس باشند. **مولفه‌های همبند قوی** در گراف جهت‌دار، کلاس‌های هم‌ارزی رئوس تحت رابطه‌ی **دوبه‌دو قابل دسترس‌اند** هستند. گراف جهت‌دار همبند قوی است اگر فقط یک مولفه‌ی همبند قوی داشته باشد. گراف شکل ب – ۲ (الف) سه مولفه‌ی همبند قوی دارد: $\{1, 2, 4, 5\}$ ، $\{3\}$ و $\{6\}$. تمام جفت‌های رئوس در $\{1, 2, 4, 5\}$ **دوبه‌دو قابل دسترس** هستند. رئوس $\{3, 6\}$ تشکیل مولفه‌ی همبند را نمی‌دهند، زیرا رأس 6 از رأس 3 قابل دسترس نیست.

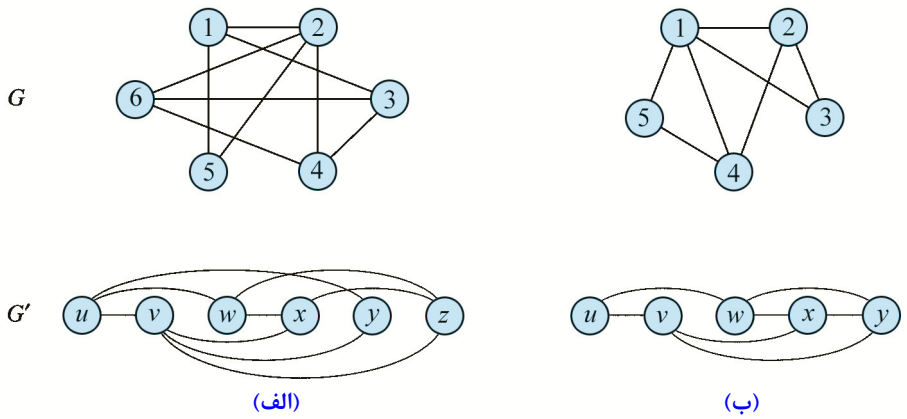
دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ در صورتی **یک‌ریخت**[5] هستند که تابع دوسوی $f : V \to V'$ وجود داشته باشد، به طوری که $(u, v) \in E$ اگر و فقط اگر $(f(u), f(v)) \in E'$. به عبارت دیگر، می‌توانیم رئوس G را تغییر برچسب دهیم تا رئوس G' محسوب شوند و یال‌های متناظر در G و G' را حفظ کنیم. شکل ب – ۳ (الف) جفتی از گراف‌های یک‌ریخت G و G' را همراه با مجموعه‌های رأس $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$ نشان می‌دهد. نگاشت از V به V' که توسط $f(1) = u$ ، $f(2) = v$ ، $f(3) = w$ ، $f(4) = x$ ، $f(5) = y$ و $f(6) = z$ مشخص می‌شود، تابع دوسوی موردنظر است. گراف‌ها در شکل ب – ۳ (ب) یک‌ریخت نیستند. گرچه هر دو گراف ۵ رأس و ۷ یال دارند، گراف بالایی دارای رأسی با درجه ۴ است ولی گراف پایینی فاقد آن است.

اگر $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ ، می‌گوییم $G' = (V', E')$ **زیرگراف**[6] $G = (V, E)$ است. با توجه به مجموعه‌ی $V' \subseteq V$ ، زیرگراف G که از V' ایجاد می‌شود، گراف $G' = (V', E')$ است که در آن داریم:

$$E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}.$$

زیرگراف حاصل از مجموعه‌ی رأس $\{1, 2, 3, 6\}$ در شکل ب – ۲ (الف)، در شکل ب – ۲ (پ) ظاهر می‌شود و دارای مجموعه‌ی یال $\{(1, 2), (2, 2), (6, 3)\}$ است.

1. Acyclic 2. Connected 3. Connected components 4. Strongly connected
5. Isomorphic 6. Subgraph



شکل ب – ۳ (الف) دو گراف یکریخت. رئوس گراف بالایی توسط $f(1) = u$ ، $f(2) = v$ ، $f(3) = w$ ، $f(4) = x$ ، $f(5) = y$ و $f(6) = z$ به گراف پایینی نگاشت می‌شوند. (ب) دو گراف که یکریخت نیستند، زیرا گراف بالایی دارای رأسی با درجه‌ی ۴ و گراف پایینی فاقد آن است.

با توجه به گراف بدون جهت $G = (V, E)$ ، **نسخه‌ی جهت‌دار** G ، گراف جهت‌دار $G' = (V, E')$ است که در آن $(u,v) \in E'$ اگر و فقط اگر $(u,v) \in E$. یعنی، به جای هر یال بدون جهت (u, v) در G ، دو یال جهت‌دار (u, v) و (v, u) را در نسخه‌ی جهت‌دار قرار می‌دهیم. با توجه به گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ ، **نسخه‌ی بدون جهت** G ، گراف بدون جهت $G' = (V, E')$ است که در آن $(u,v) \in E'$ اگر و فقط اگر $u \neq v$ و $(u,v) \in E$. یعنی، نسخه‌ی بدون جهت شامل یال‌های G است که جهت آن‌ها حذف شد و خودحلقه‌ها نیز از بین رفتند. (چون (u, v) و (v, u) یک یال در گراف بدون جهت هستند، در نسخه‌ی بدون جهت گراف جهت‌دار فقط یک بار ظاهر می‌شوند، حتی اگر گراف جهت‌دار شامل هر دو یال (u, v) و (v, u) باشد). در گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ ، **همسایه‌ی**[1] رأس u ، هر رأسی است که در نسخه‌ی بدون جهت G **همجوار**[2] u است. یعنی، v در صورتی همسایه‌ی u است که $u \neq v$ و $(u,v) \in E$ یا $(v,u) \in E$. در گراف بدون جهت، u و v در صورتی همسایه هستند که همجوار باشند.

گراف‌هایی با اسامی خاص وجود دارند. **گراف کامل**[3]، گراف بدون جهتی است که در آن هر جفت رأس‌ها، همجوار هستند. **گراف دوبخشی**[4]، گراف بدون جهت $G = (V, E)$ است که در آن V می‌تواند به دو مجموعه‌ی V_1 و V_2 افراز شود به طوری که از $(u,v) \in E$ نتیجه می‌شود که یا $u \in V_1$ و $v \in V_2$ یا $u \in V_2$ و $v \in V_1$ است. یعنی تمام یال‌ها بین مجموعه‌های V_1 و V_2 واقع هستند. گراف بدون جهت بدون دور، یک **جنگل** است و گراف بدون جهت بدون دور همبند، **درخت آزاد**[5] است (بخش ب – ۵). معمولاً از حروف اول گراف بدون جهت بدون دور استفاده کرده آن را یک **dag** می‌نامیم.

با دو نوع گراف بیشتر برخورد خواهید داشت. **گراف چندگانه**[6]، شبیه گراف بدون جهت است، ولی می‌تواند شامل خودحلقه باشد و بین رأس‌ها می‌تواند چندین یال وجود داشته باشد. **اَبَرگراف**[7] شبیه گراف بدون

1. Neighbor 2. Adjacent 3. Complete graph 4. Bipartite graph 5. Free tree
6. Multigraph 7. Hypergraph

جهت است، ولی هر **اَبَریال**[1] به جای این‌که دو رأس را به هم متصل کند، زیرمجموعه‌ی دلخواهی از رئوس را به هم متصل می‌کند. بسیاری از الگوریتم‌هایی که برای گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت نوشته شدند، می‌توانند برای این ساختارهای شبه‌گراف استفاده شوند.

انقباض[2] گراف بدون جهت $G = (V, E)$ توسط یال $e = (u, v)$ ، گراف $G' = (V', E')$ است که $V' = V - \{u, v\} \cup \{x\}$ و x رأس جدیدی است. مجموعه‌ی یال‌های E' از E تشکیل می‌شود که یال (u, v) از آن حذف شد و برای هر رأس w که با u یا v یک یال تشکیل می‌دهند، هر کدام از یال‌های (u, w) و (v, w) که در E است، حذف می‌شوند و یال جدید (x, w) اضافه می‌شود. نتیجه این‌که، u و v در یک رأس منقبض می‌شوند.

تمرین‌ها

تمرین ب-۴-۱: حاضرین در یک جشن برگزارشده در دانشکده، برای سلام، به یکدیگر دست می‌دهند و هر پروفسور به یاد دارد که چند بار به افراد دست داده است. در انتهای مهمانی، رییس اداره تعداد دفعاتی که هر پروفسور دست داده است را جمع می‌کند. با اثبات **لِم دست‌تکانی**، نشان دهید که نتیجه زوج است: اگر $G = (V, E)$ ، داریم:

$$\sum_{v \in V} \text{degree}(v) = 2\,|E|$$

تمرین ب-۴-۲: نشان دهید که اگر گراف جهت‌دار یا بدون جهت شامل مسیری بین دو رأس u و v باشد، آنگاه شامل مسیر ساده‌ای بین u و v است. نشان دهید که اگر گراف جهت‌دار شامل دور باشد، آنگاه شامل دور ساده است.

تمرین ب-۴-۳: نشان دهید که در هر گراف همبند و بدون جهت $G = (V, E)$ رابطه‌ی $|E| \geq |V| - 1$ برقرار است.

تمرین ب-۴-۴: تحقیق کنید که در گراف بدون جهت، رابطه‌ی **قابل دسترس از**، یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی رئوس گراف است. کدام یک از سه خاصیت رابطه‌ی هم‌ارزی، در حالت کلی برای رابطه‌ی **قابل دسترس از** بر روی گراف جهت‌دار برقرار است؟

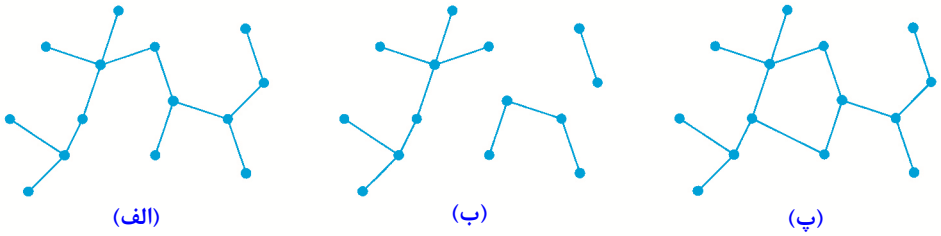
تمرین ب-۴-۵: نسخه‌ی بدون جهت گراف جهت‌دار در شکل ب – ۲ (الف) چیست؟ نسخه‌ی جهت‌دار گراف بدون جهت در شکل ب – ۲ (ب) چیست؟

★ **تمرین ب-۴-۶:** اگر تلاقی در اَبَرگراف، متناظر با همجواری در گراف دوبخشی مجاز باشد، نشان دهید که اَبَرگراف می‌تواند توسط گراف دوبخشی نمایش داده شود (**راهنمایی:** فرض کنید یک مجموعه از رئوس در گراف دوبخشی متناظر با رئوس اَبَرگراف است و فرض کنید مجموعه‌ی دیگری از رئوس گراف دوبخشی، متناظر با اَبَریال‌ها است).

ب–۵ درختان

همانند گراف‌ها، مفاهیم زیادی درباره‌ی درختان وجود دارد. این بخش، تعریف‌ها و خواص ریاضی چندین نوع درخت را شرح می‌دهد. بخش‌های ۱۰–۳ و ۲۰–۱ نشان می‌دهند که چگونه می‌توان درختان را در حافظه‌ی کامپیوتر نمایش داد.

1. Hyperedge 2. Contraction



شکل ب – ۴ (الف) درخت آزاد. (ب) جنگل. (پ) گرافی که شامل یک دور است، بنابراین نه درخت و نه جنگل است.

ب – ۵–۱ درختان آزاد (free tree)

همان‌طور که در بخش ب – ۴ تعریف کردیم، **درخت آزاد**، گراف بدون جهت و بدون دور همبند است. وقتی می‌گوییم که گراف یک درخت است، از واژه‌ی **آزاد** صرف‌نظر می‌کنیم. اگر گراف بدون جهت، بدون دور باشد، ولی احتمالاً ناهمبند باشد، یک **جنگل** است. بسیاری از الگوریتم‌های مربوط به درخت، برای جنگل کار می‌کنند. شکل ب –۴ (الف) یک درخت آزاد و شکل ب – ۴ (ب) یک جنگل را نشان می‌دهد. جنگل در شکل ب – ۴، درخت نیست زیرا شامل دور است. گراف شکل ب – ۴ (پ) نه درخت و نه جنگل است، زیرا شامل دور است.

قضیه‌ی زیر بسیاری از حقایق را درباره‌ی درختان بیان می‌کند.

قضیه‌ی ب – ۲ (خواص درختان آزاد)

فرض کنید $G = (V, E)$ گراف بدون جهت باشد. گزاره‌های زیر، هم‌ارز هستند:

۱. G درخت آزاد است.

۲. هر دو رأس در G توسط مسیر ساده‌ی یکتایی به هم متصل (همبند) هستند.

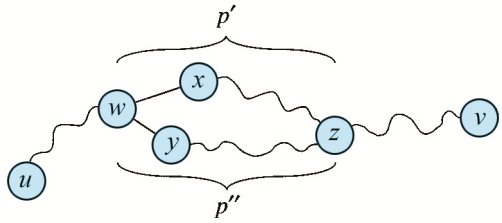
۳. G همبند است، اما اگر هر یالی از E حذف شود، گراف حاصل، ناهمبند است.

۴. G همبند است و $|E| = |V| - 1$.

۵. G بدون دور است و $|E| = |V| - 1$.

۶. G بدون دور است و اگر یالی به E اضافه شود، گراف حاصل، شامل دور است.

اثبات: $(1) \Rightarrow (2)$: چون درخت، همبند است، هر دو رأس در G حداقل توسط یک مسیر ساده به هم متصل هستند. برای رسیدن به تناقض فرض کنید u و v رئوسی باشند که توسط دو مسیر متمایز p_1 و p_2 به هم متصل هستند (شکل ب – ۵). فرض کنید w رأسی باشد که در آن، مسیرها ابتدا واگرا می‌شوند؛ یعنی، w اولین رأسی است که هم بر روی p_1 و هم بر روی p_2 است که رأس بعدی آن در p_1 برابر با x و رأس بعدی آن در p_2 برابر با y است که $x \neq y$. فرض کنید z اولین رأسی باشد که در آن، مسیرها دوباره همگرا می‌شوند، یعنی، z اولین رأس بعد از w بر روی p_1 است که بر روی p_2 نیز قرار دارد. فرض کنید $p' = w \to x \rightsquigarrow z$ زیرمسیری از p_1 از w از طریق x تا z باشد، بنابراین $p_1 = u \rightsquigarrow w \overset{p'}{\rightsquigarrow} z \rightsquigarrow v$ و فرض کنید $p'' = w \to y \rightsquigarrow z$ زیرمسیری از p_2 از w از طریق y تا z باشد، بنابراین $p_2 = u \rightsquigarrow w \overset{p''}{\rightsquigarrow} z \rightsquigarrow v$. مسیرهای p' و p'' در هیچ رأسی به جز نقاط انتهایی، مشترک نیستند. بنابراین، مسیر حاصل از اتصال p' و وارون p'' ، یک دور است. این نکته، با فرض درخت‌بودن G تناقض دارد. بنابراین، اگر G درخت باشد، حداکثر یک مسیر ساده می‌تواند بین دو رأس باشد.



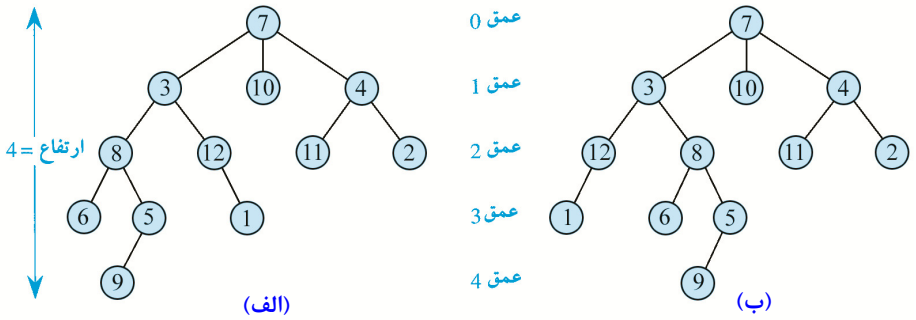
شکل ب -۵ مرحله‌ای از اثبات قضیه‌ی ب-۲: اگر (۱) G درخت آزاد باشد، آن‌گاه، (۲) هر دو رأس در G توسط مسیر ساده‌ی یکتایی به هم متصل می‌شوند. برای تناقض فرض کنید که رئوس u و v توسط دو مسیر ساده‌ی متمایز p_1 و p_2 به هم متصل هستند. این مسیرها ابتدا در رأس w واگرا می‌شوند و سپس ابتدا در رأس z دوباره همگرا می‌شوند. مسیر p' که با وارون مسیر p'' الحاق شد، دوری را ایجاد می‌کند که منجر به تناقض می‌شود.

$(2) \Rightarrow (3)$: اگر هر دو رأس در G توسط مسیر ساده‌ی یکتایی به هم متصل شوند، آن‌گاه G همبند است. فرض کنید (u, v) یالی در E باشد. این یال، مسیری از u به v است و در نتیجه باید مسیر یکتایی از u به v باشد. اگر (u, v) را از G حذف کنیم، مسیری از u به v وجود ندارد و در نتیجه، حذف آن موجب ناهمبندشدن G می‌شود.

$(3) \Rightarrow (4)$: بنا به فرض، گراف G همبند است و بنا به تمرین ب- ۴-۳، داریم $|E| \geq |V| - 1$. با استقرا روی $|V|$ اثبات خواهیم کرد $|E| \leq |V| - 1$. حالت‌های پایه $|V| = 1$ یا $|V| = 2$ است و در هر دو حالت، $|E| = |V| - 1$ است. برای مرحله‌ی استقرا، فرض کنید برای گراف G داریم $|V| \geq 3$ و هر گراف $G' = (V', E')$ که در آن $|V'| < |V|$ که (۳) را ارضا می‌کند، رابطه‌ی $|E'| \leq |V'| - 1$ را نیز ارضا می‌کند. حذف یال دلخواهی از G ، گراف را به $k \geq 2$ مولفه‌ی همبند تقسیم می‌کند (در واقع، $k = 2$). هر مولفه، در (۳) صدق می‌کند، وگرنه G حالت (۳) را برآورده نمی‌سازد. اگر هر مولفه‌ی همبند V_i را به همراه مجموعه‌ی یال E_i آن، به عنوان درخت آزاد خود در نظر بگیریم، آن‌گاه چون هر مولفه کمتر از $|V|$ رأس دارد، بر اساس فرض استقرا داریم $|E_i| \leq |V_i| - 1$. بنابراین، بنا به استقرا، تعداد یال‌ها در تمام مولفه‌های ترکیبی عبارت‌است‌از $|V| - k \leq |V| - 2$. با اضافه‌کردن یال حذف‌شده، خواهیم داشت $|E| \leq |V| - 1$.

$(4) \Rightarrow (5)$: فرض کنید G همبند است و $|E| = |V| - 1$. باید نشان دهیم که G بدون دور است. فرض کنید G دارای دوری با k رأس $v_1, v_2, \ldots, v_k$ است و بدون از دست دادن کلّیت موضوع فرض کنید که این دور ساده است. فرض کنید $G_k = (V_k, E_k)$ زیرگرافی از G باشد که شامل دور است. توجه کنید که $|V_k| = |E_k| = k$. اگر $k < |V|$، باید رأس $v_{k+1} \in V - V_k$ وجود داشته باشد که همجوار رأس $v_i \in V_k$ است، زیرا G همبند است. فرض کنید $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ زیرگراف G باشد، به طوری که $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{(v_i, v_{k+1})\}$. توجه کنید که $|V_{k+1}| = |E_{k+1}| = k + 1$. اگر $k + 1 < |V|$ ، می‌توانیم با تعریف G_{k+2} به همین صورت ادامه دهیم و غیره، تا این‌که $G_n = (V_n, E_n)$ را به دست آوریم که در آن $n = |V|$ ، $V_n = V$ و $|E_n| = |V_n| = |V|$. چون G_n زیرگراف G است، داریم $E_n \subseteq E$ و در نتیجه $|E| \geq |E_n| = |V_n| = |V|$ که با فرض $|E| = |V| - 1$ تناقض دارد. بنابراین، G بدون دور است.

$(5) \Rightarrow (6)$: فرض کنید G بدون دور است و $|E| = |V| - 1$. فرض کنید k تعداد مولفه‌های همبند G است. هر مولفه‌ی همبند، بنا به تعریف یک درخت آزاد است و چون (۵) از (۱) نتیجه می‌شود، مجموع تمام یال‌ها در تمام مولفه‌های همبند G برابر است با $|V| - k$. در نتیجه، باید داشته باشیم $k = 1$ و G یک درخت است. چون (۲) از (۱) نتیجه می‌شود، هر دو رأس در G توسط مسیر ساده‌ی یکتایی به هم متصل هستند. بنابراین، اضافه‌کردن یک یال به G ، دوری را ایجاد خواهد کرد.



شکل ب – ۶ درختان ریشه‌دار و مرتب. (الف) درخت ریشه‌دار با ارتفاع ۴. این درخت به روش استاندارد رسم شده است: گره‌ی ریشه (۷) در بالا و فرزندان (گره‌هایی با عمق ۱) در زیر آن قرار دارند، فرزندان آن‌ها (گره‌هایی با عمق ۲) در زیر آن‌ها قرار دارند و غیره. اگر درخت مرتب باشد، ترتیب نسبی چپ به راست فرزندان مهم است، وگرنه مهم نیست. (ب) درخت ریشه‌دار دیگر. به عنوان درخت ریشه‌دار، این درخت مانند درخت در قسمت (الف) است، ولی به عنوان درخت مرتب، متفاوت از آن است، زیرا فرزندان گره‌ی ۳ به ترتیب متفاوتی ظاهر می‌شود.

$(6) \Rightarrow (1)$: فرض کنید G بدون دور است، ولی اگر هر یالی به E اضافه شود، دوری ایجاد می‌گردد. باید نشان دهیم که G همبند است. فرض کنید u و v رئوس دلخواهی در G باشند. اگر u و v قبلاً همجوار نبودند، اضافه‌کردن یال (u, v) ، دوری را ایجاد می‌کند که در آن تمام یال‌ها به جز (u, v) به G تعلق دارند. بنابراین، مسیری از u به v وجود دارد و چون u و v به طور دلخواه انتخاب‌شده بودند، G همبند است. ■

ب– ۵–۲ درختان ریشه‌دار و مرتب

درخت ریشه‌دار[1]، درخت آزادی است که در آن یکی از رئوس، از بقیه متمایز است و **ریشه** نام دارد. معمولاً رأس درخت ریشه‌دار را **گره‌ی** درخت می‌نامیم. شکل ب – ۶ (الف) درخت ریشه‌دار را بر روی مجموعه‌ای از ۱۲ گره با ریشه‌ی ۷ نشان می‌دهد.

گره‌ی x را در درخت ریشه‌دار T با ریشه‌ی r درنظربگیرید. هر گره‌ی y روی مسیر یکتایی از r به x ، **جدّ**[2] x نام دارد. اگر y جدّ x باشد، آن‌گاه x **نسل**[3] y است (هر گره، جدّ و نسل خودش است). اگر y جد x باشد و $x \neq y$ ، آن‌گاه y **جد محض** x و x **نسل محض** y است. **زیردرختی با ریشه‌ی x** ، درختی است که توسط نسل‌های x با ریشه در x به دست آمده است. به عنوان مثال، زیردرختی با ریشه‌ی ۸ در شکل ب – ۶ (الف)، شامل گره‌های ۸ ، ۶، ۵ و ۹ است.

اگر (y, x) یال آخر در مسیری از ریشه‌ی r درخت T به گره‌ی x باشد، آن‌گاه y **والد** x و x **فرزند** y است. ریشه در T ، تنها گره‌ای است که والد ندارد. اگر دو گره، والد یکسانی داشته باشند، **همزاد** هم هستند. گره‌ی فاقد فرزند، **گره‌ی خارجی** یا **برگ** نام دارد. گره‌ی غیر برگ را **گره‌ی داخلی** می‌گویند.

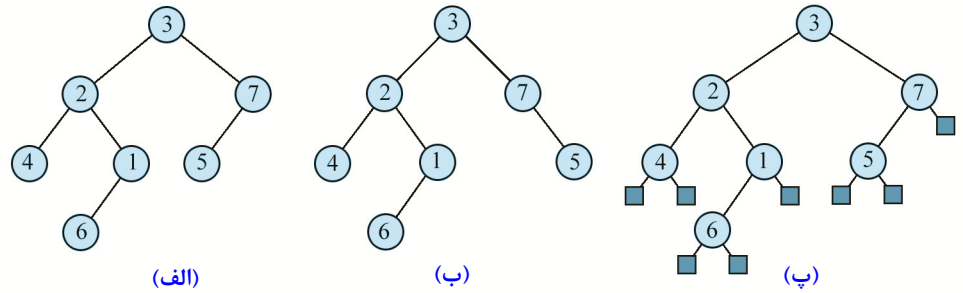
تعداد فرزندان گره‌ی x در درخت ریشه‌دار T ، **درجه‌ی** آن نام دارد[4]. طول مسیر ساده از ریشه‌ی r به گره‌ی x ، **عمق**[5] x در T نام دارد. **سطح** درخت شامل تمام گره‌ها در یک مسیر است. **ارتفاع** گره در درخت، تعداد یال‌ها بر روی طویل‌ترین مسیر ساده از آن گره به برگ است و ارتفاع درخت، برابر با ارتفاع ریشه است. ارتفاع درخت، برابر با بزرگ‌ترین عمق هر گره در درخت نیز است.

---

1. Rooted tree 2. Ancestor 3. Descendant

۳. توجه کنید که درجه‌ی گره بستگی به این دارد که T ریشه‌دار یا درخت آزاد باشد. درجه‌ی رأس در درخت آزاد، همانند هر گراف بدون جهت، برابر با تعداد رئوس همجوار است. در درخت ریشه‌دار، درجه برابر با تعداد فرزندان است. والد یک گره در شمارش درجه‌ی آن منظور نمی‌شود.

5. Depth



شکل ب – ۷ درختان دودویی. (الف) درخت دودویی که به روش استاندارد رسم شد. فرزند چپ گره در پایین گره و در سمت چپ آن رسم شد. فرزند راست در پایین گره و در سمت راست آن رسم شد. (ب) درخت دودویی متفاوت از (الف). در (الف)، فرزند چپ گره‌ی ۷، برابر ۵ است و فرزند راست ندارد. در (ب)، فرزند چپ گره‌ی ۷ وجود ندارد و فرزند راست آن ۵ است. به عنوان درختان مرتب، این دو درخت یکسان هستند، اما به عنوان درختان دودویی، متفاوت هستند. (پ) درخت دودویی (الف) که با گره‌های داخلی مربوط به درخت دودویی پُر[1] نشان داده شده است: درخت مرتبی که در آن هر گره‌ی داخلی دارای درجه‌ی ۲ است. برگ‌ها در این درخت، به صورت مربع نشان داده شدند.

درخت مرتب، درخت ریشه‌داری است که در آن، فرزندان هر گره مرتب هستند. یعنی، اگر گره‌ای k فرزند دارد، آن‌گاه فرزند اول، فرزند دوم، ... و فرزند k اُم وجود دارند. دو درخت در شکل ب – ۶، وقتی مرتب در نظر گرفته شوند، متفاوت هستند، اما وقتی فقط درخت ریشه‌دار در نظر گرفته می‌شوند، یکسان هستند.

ب–۵–۳ درختان دودویی و مکانی (موضعی)

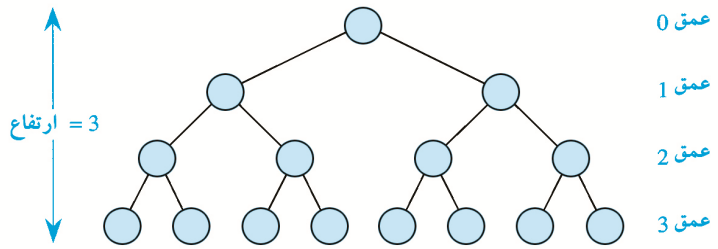
درختان دودویی به طور بازگشتی تعریف می‌شوند. **درخت دودویی T** ، ساختاری است که بر روی مجموعه‌ی متناهی تعریف می‌شود، به طوری که:

- خالی است (فاقد گره است)، یا
- مجموعه‌ای از گره‌های متمایز است: گره‌ی **ریشه**، درخت دودویی به نام **زیردرخت چپ** و درخت دودویی به نام **زیردرخت راست**.

درخت دودویی که فاقد گره است، **درخت تهی** یا **درخت خالی** نام دارد و گاهی با NIL نشان داده می‌شود. اگر زیردرخت چپ خالی نباشد، ریشه‌ی آن، **فرزند چپ** ریشه‌ی کل درخت است. به طور مشابه، ریشه‌ی زیردرخت راستِ **غیرتهی**، فرزند راست ریشه‌ی کل درخت نام دارد. اگر زیردرختی تهی باشد، می‌گوییم فرزند ندارد. شکل ب – ۷ (الف) یک درخت دودویی را نشان می‌دهد.

درخت دودویی، فقط درخت مرتبی نیست که در آن، حداکثر درجه‌ی هر گره ۲ است. برای مثال، در درخت دودویی، اگر گره‌ای فقط یک فرزند داشته باشد، **مکان** فرزند – چه فرزند چپ باشد و چه فرزند راست – مهم است. در درخت مرتب، مهم نیست که فرزند خاصی، فرزند چپ یا راست باشد. شکل ب – ۷ (ب) یک درخت دودویی را نشان می‌دهد که متفاوت از درخت شکل ب – ۷ (الف) است، زیرا مکان یک گره فرق می‌کند. به عنوان درختان مرتب، این دو درخت یکسان هستند.

1. Full binary tree



شکل ب – ۸ درخت دودویی کامل به ارتفاع ۳ با ۸ برگ و ۷ گره‌ی داخلی.

اطلاعات مربوط به مکان گره‌ها در درخت دودویی را می‌توان توسط گره‌های داخلی درخت مرتب نمایش داد که در شکل ب – ۷ (پ) آمده است. ایده‌ی این کار این‌است‌که به جای هر فرزندی که در درخت دودویی موجود نباشد، گره‌ای را قرار دهیم که هیچ فرزندی ندارد. این گره‌های برگ، در شکل به صورت مربع نشان داده شدند. درخت حاصل، **درخت دودویی پُر** است: هر گره، یا برگ است یا دقیقاً دارای درجه‌ی ۲ است. گره‌ای با درجه‌ی ۱ وجود ندارد. در نتیجه، ترتیب فرزندان گره، اطلاعات مربوط به مکان گره‌ها را نگه می‌دارد.

اطلاعات مربوط به مکان گره‌ها که درختان دودویی را از درختان مرتب متمایز می‌کند، می‌تواند به درختانی با بیش از ۲ فرزند در هر گره تعمیم داده شود. در **درخت مکانی**[1] **(موضعی)**، فرزندان یک گره، با اعداد صحیح متفاوتی برچسب‌گذاری می‌شوند. اگر هیچ فرزندی با برچسب عدد صحیح i مشخص نشده باشد، به معنای این‌است‌که فرزند i اُم گره وجود ندارد. **درخت k تایی**، یک درخت مکانی است که در آن برای هر گره، تمام فرزندان با برچسب‌های بزرگ‌تر از k ، وجود ندارند. بنابراین، درخت دودویی، درخت k تایی با $k = 2$ است.

درخت k تایی کامل[2]، یک درخت k تایی است که در آن تمام برگ‌ها عمق یکسانی دارند و تمام گره‌های داخلی، درجه‌ی k دارند. شکل ب – ۸ یک درخت دودویی کامل با ارتفاع ۳ را نشان می‌دهد. درخت k تایی کامل به ارتفاع h ، چند برگ دارد؟ ریشه دارای k فرزند در عمق ۱ است که هر کدام k فرزند در عمق ۲ دارند و غیره. بنابراین، تعداد برگ‌ها در عمق h ، برابر با k^h است. در نتیجه، ارتفاع درخت k تایی کامل با n برگ، برابر با $\lg_k n$ است. تعداد گره‌های داخلی درخت k تایی کامل با ارتفاع h ، بنا به معادله‌ی (الف–۵) برابر است با:

$$\begin{aligned} 1 + k + k^2 + \cdots + k^{h-1} &= \sum_{i=0}^{h-1} k^i \\ &= \frac{k^h - 1}{k - 1} \quad \text{(بنا به معادله‌ی (الف-۶))} \end{aligned}$$

بنابراین، درخت دودویی کامل دارای $2^h - 1$ گره‌ی داخلی است.

تمرین‌ها

تمرین ب–۵–۱: تمام درختان آزاد متشکل از ۳ رأس x ، y و z را رسم کنید. تمام درختان ریشه‌دار با گره‌های x ، y و z که x ریشه باشد را رسم کنید. تمام درختان مرتب با گره‌های x ، y ، z با ریشه‌ی x را رسم کنید. تمام درختان دودویی با گره‌های x ، y ، z ، با ریشه‌ی x را رسم کنید.

1. Positional tree 2. Complete k-ary tree

تمرین ب-۵-۲: فرض کنید $G = (V, E)$ گراف بدون دور جهت‌داری باشد که در آن رأس $v_0 \in V$ وجود دارد که مسیر یکتایی از v_0 به هر رأس $v \in V$ وجود دارد. ثابت کنید نسخه‌ی بدون جهت G ، یک درخت است.

تمرین ب-۵-۳: با استقرا نشان دهید که تعداد گره‌هایی با درجه‌ی ۲ در هر درخت دودویی غیرتهی، یکی کمتر از تعداد برگ‌ها است. نتیجه‌گیری کنید که تعداد گره‌های داخلی در درخت دودویی کامل یکی کمتر از تعداد برگ‌ها است.

تمرین ب-۵-۴: ثابت کنید که برای هر مقدار صحیح $k \geq 1$ یک درخت دودویی کامل با k برگ وجود دارد.

تمرین ب-۵-۵: با استقرا نشان دهید که درخت دودویی غیرخالی با n گره، دارای حداقل ارتفاع $\lfloor \lg n \rfloor$ است.

★ **تمرین ب-۵-۶:** **طول مسیر داخلی** درخت دودویی پر، با در نظر گرفتن تمام گره‌های داخلی درخت، برابر با مجموع عمق هر گره است. به طور مشابه، **طول مسیر خارجی** با در نظر گرفتن تمام برگ‌های درخت، برابر با مجموع عمق هر برگ است. یک درخت دودویی پر با n گره‌ی داخلی با طول مسیر داخلی i و طول مسیر خارجی e را در نظر بگیرید. ثابت کنید $e = i + 2n$.

★ **تمرین ب-۵-۷:** فرض کنید وزن $w(x) = 2^{-d}$ را برای هر برگ x به عمق d در درخت دودویی T در نظر بگیریم و فرض کنید L مجموعه‌ای از برگ‌های T باشد. ثابت کنید $\sum_{x \in L} w(x) \leq 1$ است (این نامعادله را نامعادله‌ی Kraft می‌گویند).

★ **تمرین ب-۵-۸:** نشان دهید که اگر $L \geq 2$ ، آنگاه هر درخت دودویی با L برگ شامل زیردرختی است که از L/3 تا 2L/3 برگ دارد.

ب-۶ مسأله‌ها

مسأله‌ی ب-۱: رنگ‌آمیزی گراف.

با توجه به گراف بدون جهت $G = (V, E)$ ، k-رنگ‌آمیزی گراف G ، تابع $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ است به طوری که، برای هر یال $u, v \in E$ ، داریم، $c(u) \neq c(v)$. به عبارت دیگر، اعداد $1, 2, \ldots, k$ نشان‌دهنده‌ی k رنگ هستند و رئوس همجوار باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند.

الف. نشان دهید هر درخت می‌تواند با دو رنگ، رنگ‌آمیزی شود.

ب. نشان دهید که موارد زیر هم‌ارز هستند:

۱. G دوبخشی است.

۲. G با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است.

۳. G فاقد دورهایی به طول فرد است.

پ. فرض کنید d درجه بیشینه هر رأس در گراف G باشد. ثابت کنید G می‌تواند با $d + 1$ رنگ، رنگ‌آمیزی شود.

ت. نشان دهید که اگر G دارای $O(|V|)$ یال باشد، آنگاه G می‌تواند با $O(\sqrt{|V|})$ رنگ، رنگ‌آمیزی شود.

مسأله‌ی ب-۲: گراف‌های دوست.

هر یک از گزاره‌های زیر را به عنوان یک قضیه درباره‌ی گراف‌های بدون جهت بیان کرده سپس آن را اثبات کنید. فرض کنید رابطه‌ی دوستی، متقارن است ولی بازتابی نیست.

الف. هر گروه حداقل دو نفری، حداقل شامل دو نفر است که تعداد دوستان یکسانی در گروه دارند.

ب. هر گروه ۶ نفری، شامل سه دوست متقابل (دوطرفه) یا سه غریبه‌ی متقابل است.

پ. هر گروه از افراد می‌توانند به دو زیرگروه تقسیم شوند، به طوری که حداقل نیمی از دوستان هر نفر، به زیرگروهی تعلق دارد که آن فرد، عضو آن گروه نیست.

ت. اگر هر فرد در گروه، دوست حداقل نیمی از افراد آن گروه باشد، آنگاه گروه می‌تواند حول میزی بنشیند که هر نفر بین دو دوست قرار می‌گیرد.

مسأله‌ی ب-۳: نصف‌کردن درختان.

در بسیاری از الگوریتم‌های تقسیم و حل که روی گراف‌ها کار می‌کنند، لازم است گراف به دو بخش با اندازه تقریباً یکسان تقسیم شود که در اثر افراز رئوس به دست می‌آید. این مسأله، دو بخش از درخت را بررسی می‌کند که در اثر حذف تعداد کمی از یال‌ها به دست می‌آید. لازم است اگر پس از حذف یال‌ها، دو رأس در زیردرخت یکسانی به پایان برسند، این دو رأس باید در یک افراز باشند.

الف. نشان دهید که با حذف یک یال، می‌توان رئوس در درخت دودویی k رأسی را به دو مجموعه‌ی A و B تقسیم کرد، به طوری که $|A| \le 3n/4$ و $|B| \le 3n/4$.

ب. نشان دهید که ثابت 3/4 در قسمت (الف) در بدترین حالت، بهینه است. برای این کار مثالی از درخت دودویی ساده ارائه دهید که در متوازن‌ترین افراز آن پس از حذف یک یال، داریم $|A| = 3n/4$.

پ. نشان دهید که با حذف حداکثر $O(\lg n)$ یال، می‌توان رئوس یک درخت دودویی n رأسی را به دو مجموعه‌ی A و B افراز کرد، به طوری که $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ و $|B| = \lceil n/2 \rceil$.