پیوست ت
ماتریس‌ها

ماتریس‌ها کاربردهای فراوانی دارند، از جمله در محاسبات علمی. اگر قبلاً با ماتریس‌ها کار کرده باشید، با اغلب مطالب این پیوست آشنایی دارید، ولی بعضی از آن‌ها ممکن است جدید باشند. بخش ت – ۱ به تعاریف و اَعمال مقدماتی ماتریسی می‌پردازد و بخش ت – ۲ بعضی از خواص اصلی ماتریس‌ها را بحث می‌کند.

ت–۱ ماتریس‌ها و اَعمال ماتریسی

در این بخش، بعضی از مفاهیم اساسی نظریه‌ی ماتریس‌ها و خواص مهم آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

ماتریس‌ها و بردارها

ماتریس، آرایه‌ای چهارگوش از اعداد است. برای مثال، ماتریس A را که در زیر آمده است، در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (ت–۱)$$

این ماتریس، یک ماتریس 2×3 است و به صورت $A=(a_{ij})$ نمایش داده می‌شود که در آن، $i=1,2$ و $j=1,2,3$ است و عنصر موجود در سطر i و ستون j را با a_{ij} نشان می‌دهیم. از حروف بزرگ برای نمایش ماتریس و از حروف کوچک برای نمایش عناصر آن استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ای از تمام ماتریس‌های $m\times n$ با درایه‌هایی از نوع حقیقی، به صورت $\square^{m\times n}$ نمایش داده می‌شود و به طور کلی، مجموعه‌ای از ماتریس‌های $m\times n$ که درایه‌های آن‌ها از S گرفته شدند، با $S^{m\times n}$ نمایش داده می‌شوند.

ترانهاده‌ی[1] ماتریس A ، ماتریس A^T است که با تعویض سطرها و ستون‌های A به دست آمده است. برای ماتریس A از معادله‌ی (ت – ۱)، داریم:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

بردار[2]، آرایه‌ای یک‌بعدی از اعداد است. به عنوان مثال، x که در زیر آمده است، برداری به اندازه‌ی ۳ است:

1. Transpose 2. Vector

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

گاهی برداری به طول n را **بردار n تایی** می‌نامند. برای نمایش بردارها از حروف کوچک استفاده می‌کنیم و عنصر i اُم بردار x به طول n را به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ به صورت x_i نمایش می‌دهیم. شکل استاندارد بردار را **بردار ستونیِ** متناظر با ماتریس $n \times 1$ درنظرمی‌گیریم. **بردار سطری** متناظر آن را با ترانهاده کردن آن به دست می‌آوریم:

$$x^T = (2 \quad 3 \quad 5).$$

بردار واحد[1] e_i، برداری است که عنصر i اُم آن ۱ و سایر عناصر آن صفر است. معمولاً، اندازه‌ی بردار واحد، از متن مشخص می‌شود.

ماتریس صفر، ماتریسی است که تمام عناصر آن صفر است. چنین ماتریسی معمولاً با 0 نمایش داده می‌شود، زیرا ابهام بین عدد 0 و ماتریسی از صفرها معمولاً از متن مشخص می‌شود. اگر ماتریسی از صفرها موردنظر باشد، اندازه‌ی ماتریس نیز باید از متن به دست آید.

ماتریس‌های مربعی

ماتریس مربعی $n \times n$ به وفور استفاده می‌شود. چندین حالت از ماتریس‌های مربعی، جالب هستند:

۱. در **ماتریس قطری**، هر وقت $i \neq j$ باشد، $a_{ij} = 0$ است. چون تمام عناصر غیر واقع بر قطر این ماتریس، صفر است، آن را با عناصر روی قطر می‌توان مشخص کرد:

$$\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

۲. **ماتریس همانی**[2] $n \times n$ به نام I_n، ماتریسی قطری است که عناصر قطر آن، یک است:

$$\begin{aligned} I_n &= \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

وقتی I بدون اندیس ظاهر شود، اندازه‌ی آن را از متن تشخیص می‌دهیم. ستون i اُم ماتریس همانی، بردار واحد e_i است.

۳. ماتریس سه‌قطری T ، ماتریسی است که به ازای هر $|i - j| > 1$ ، داریم $t_{ij} = 0$. درایه‌های غیرصفر فقط در قطر اصلی، بلافاصله در بالای قطر اصلی ($t_{i,i+1}$ برای $i = 1, 2, \ldots, n-1$)، یا بلافاصله زیر قطر اصلی ($t_{i+1,i}$ برای $i = 1, 2, \ldots, n-1$) قرار دارند:

1. Unit vector 2. Identity matrix

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & t_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t_{n-2,n-2} & t_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t_{n-1,n-2} & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t_{n,n-1} & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

۴. **ماتریس بالامثلثی** U ماتریسی است که به ازای $i > j$ داریم $u_{ij} = 0$. تمام درایه‌های زیر قطر اصلی صفر هستند:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

ماتریس بالامثلثی در صورتی **بالامثلثی واحد** است که تمام عناصر قطر آن برابر با یک باشد.

۵. **ماتریس پایین مثلثی** L ، ماتریسی است که اگر $i < j$ ، داریم $l_{ij} = 0$. تمام درایه‌های بالای قطر اصلی صفر هستند:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

ماتریس پایین مثلثی، در صورتی **پایین مثلثی واحد** است که تمام عناصر قطر آن یک باشد.

۶. **ماتریس جایگشت**[1] P در هر سطر یا ستون، فقط یک 1 دارد و درایه‌های دیگر آن صفر هستند. مثالی از ماتریس جایگشت در زیر آمده است:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

چنین ماتریسی را به این دلیل ماتریس جایگشت گویند که اثر ضرب بردار x در ماتریس جایگشت، **تغییر چیدمان**[2] عناصر x است. تمرین ت-۱-۴ خواص دیگری از ماتریس‌های جایگشت را نشان می‌دهد.

۷. **ماتریس متقارن**[3] A ، در شرط $A = A^T$ صدق می‌کند. نمونه‌ای از ماتریس متقارن در زیر آمده است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Permutation 2. Rearrange 3. Symmetric matrix

اَعمال اصلی بر روی ماتریس‌ها

عناصر ماتریس یا بردار، **اعداد اسکالر**[1] از یک سیستم اعداد اول مثل اعداد حقیقی، اعداد مختلط یا اعداد صحیح به پیمانه‌ی یک عدد اول است. سیستم اعداد، چگونگی ضرب و جمع را تعریف می‌کند. این تعاریف را می‌توان تعمیم داد تا جمع و ضرب ماتریس‌ها را دربرگیرد.

جمع ماتریس را به این صورت تعریف می‌کنیم. اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ ماتریس‌هایی با ابعاد $m \times n$ باشند، آن‌گاه ماتریس جمع آن‌ها $C = (c_{ij}) = A + B$ یک ماتریس $m \times n$ است که برای $i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

یعنی، جمع ماتریس، به صورت مولفه به مولفه[2] انجام می‌شود. ماتریس صفر، ماتریس همانی جمع ماتریسی است:

$$A + 0 = A = 0 + A\,.$$

اگر λ یک عدد و $A = (a_{ij})$ یک ماتریس باشد، آن‌گاه $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ یک **ضرب اسکالر** A است که با ضرب هر عنصر A در λ به دست می‌آید. به عنوان یک حالت خاص، **قرینه‌ی** ماتریس $A = (a_{ij})$ را به $-1 \cdot A = -A$ تعریف می‌کنیم، به طوری که درایه‌ی ij اُم $-A$ برابر با $-a_{ij}$ است. بنابراین داریم:

$$A + (-A) = 0 = (-A) + A\,.$$

از منفی یک ماتریس برای تعریف **تفریق ماتریس** استفاده می‌کنیم: $A - B = A + (-B)$.

ضرب ماتریس را به این صورت تعریف می‌کنیم. با دو ماتریس A و B شروع می‌کنیم که سازگار باشند، یعنی تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B باشد (به طور کلی، عبارتی که ضرب ماتریس AB را دربرمی‌گیرد، فرض می‌کند که A و B سازگارند). اگر $A = (a_{ik})$ یک ماتریس $p \times q$ و $B = (b_{kj})$ یک ماتریس $q \times r$ باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها $C = AB$ و ماتریس $C = (c_{ij})$ با ابعاد $p \times r$ است که در آن، برای $i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, p$ داریم:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} \qquad \text{(ت-۲)}$$

روال RECTANGULAR-MATRIX-MULTIPLY، ضرب ماتریس را بر اساس معادله‌ی (ت-۲) به دست می‌آورد. این روال فرض می‌کند عناصر آرایه‌ی C همگی صفر شده‌اند. در این روال از تعداد pqr عمل ضرب و $p(q-1)r$ عمل جمع استفاده می‌شود که زمان اجرای آن $\Theta(pqr)$ است. اگر ماتریس‌ها مربعی و $n \times n$ باشند، به طوری که $n = p = q = r$، شبه‌کد به روال MATRIX-MULTIPLY تبدیل می‌شود که قبلاً دیدید و زمان اجرای آن $\Theta(n^3)$ است (بخش ۴-۲ الگوریتم سریع‌تر به لحاظ مجانبی را با زمان $\Theta(n^{\lg 7})$ ارائه می‌دهد که توسط استراسن مطرح شد).

ماتریس‌ها بسیاری از (ولی نه تمام) خواص جبری اعداد را دارند. ماتریس‌های همانی، برای ضرب ماتریس‌ها، عنصر خنثی است. مثلاً برای ماتریس A با ابعاد $m \times n$ به صورت زیر است:

$$I_m A = A I_n = A$$

با ضرب یک ماتریس در ماتریس صفر، یک ماتریس صفر به دست می‌آید:

$$A \cdot 0 = 0\,.$$

1. Scalar numbers 2. Componentwise

ضرب ماتریس، شرکت‌پذیر است. برای ماتریس‌های سازگار A ، B و C داریم:

$$A(BC) = (AB)C$$

ضرب ماتریس، نسبت به جمع توزیع‌پذیر است:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC\ , \\ (B+C)D &= BD + CD\ . \end{aligned}$$

برای $n > 1$ ، ضرب ماتریس‌های $n \times n$ جابه‌جاپذیر نیست. برای مثال اگر داشته باشیم:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

آن‌گاه داریم:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

حاصل‌ضرب‌های ماتریس در بردار یا بردار در بردار را طوری تعریف می‌کنیم که گویی بردار، ماتریس سازگار $n \times 1$ است (یا یک ماتریس $1 \times n$ در مورد بردار سطری). بنابراین، اگر A ماتریس $m \times n$ باشد و x برداری به طول n ، آن‌گاه Ax برداری به طول m است. اگر x و y بردارهایی به طول n باشند، حاصل عبارت زیر، یک عدد (در واقع ماتریس 1×1) است و **حاصل‌ضرب داخلی**[1] x و y نام دارد:

$$x^{\mathrm{T}} y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

از نمادگذاری $\langle x, y \rangle$ برای نمایش $x^{\mathrm{T}}y$ استفاده می‌کنیم. عملگر حاصل‌ضرب داخلی جابه‌جاپذیر است: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. ماتریس xy^{T} یک ماتریس Z به ابعاد $n \times n$ است که **حاصل‌ضرب خارجی**[2] x و y نام دارد، به طوری که $z_{ij} = x_i y_j$. **نُرم (اقلیدسی)** $\|x\|$ مربوط به بردار n عنصری، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \|x\| &= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \\ &= (x^{\mathrm{T}} x)^{1/2}\ . \end{aligned}$$

بنابراین، نُرم x ، برابر با طول آن در فضای اقلیدسی n بُعدی است. اکنون نامعادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\left((ax_1)^2 + (ax_2)^2 + \cdots + (ax_n)^2\right)^{1/2} = |a|\,(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

یک حقیقت مفید ناشی از این نامعادله آن است که برای هر عدد حقیقی a و بردار n عنصری x داریم:

$$\|ax\| = |a|\,\|x\|\ . \qquad \text{(ت-۳)}$$

تمرین‌ها

تمرین ت-۱-۱: نشان دهید که اگر A و B ماتریس‌های متقارن $n \times n$ باشند، آن‌گاه $A + B$ و $A - B$ نیز متقارن هستند.

تمرین ت-۱-۲: ثابت کنید $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ و $A^{\mathrm{T}}A$ همیشه ماتریس متقارن است.

تمرین ت-۱-۳: ثابت کنید حاصل‌ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی، پایین‌مثلثی است.

تمرین ت-۱-۴: ثابت کنید که اگر P ماتریس جایگشت $n \times n$ و A ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه ماتریس حاصل‌ضرب PA برابر با A است که چیدمان سطرهای آن تغییر کرده است. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو ماتریس جایگشت، یک ماتریس جایگشت است.

1. Inner product 2. Outer product

ت–۲ خواص اصلی ماتریس‌ها

در این بخش، بعضی از خواص اصلی ماتریس‌ها را بررسی می‌کنیم: وارون‌ها، وابستگی و استقلال خطی، رتبه و دترمینان‌ها. علاوه‌براین، **کلاس ماتریس‌های مثبت – قطعی**[1] (معین) را تعریف می‌کنیم.

وارون، رتبه و دترمینان ماتریس

وارون ماتریس A با ابعاد $n\times n$ را ماتریس $n\times n$ تعریف می‌کنیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم (در صورت وجود)، به طوری که $AA^{-1} = In = A^{-1}A$. مثال زیر را ببینید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

بسیاری از ماتریس‌های $n\times n$ غیرصفر، وارون ندارند. ماتریس فاقد وارون را **وارون‌ناپذیر**[2] یا **منفرد**[3] گوییم. مثالی از ماتریس منفرد غیرصفر به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

اگر ماتریسی دارای وارون باشد، **وارون‌پذیر** یا **نامنفرد** نام دارد. وارون ماتریس، در صورت وجود، یکتا است (تمرین ت–۲–۱ را ببینید). اگر A و B ماتریس‌های نامنفرد $n\times n$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

عمل وارون، با عمل ترانهاده محاسبه می‌شود:

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

بردارهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ در صورتی **وابسته‌ی خطی**[4] هستند که ضرایب $c_1, c_2, \ldots, c_n$ وجود داشته باشند که تمام آن‌ها صفر نباشند، به طوری که $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$. بردارهای سطری $x_1 = (1\ \ 2\ \ 3)$، $x_2 = (2\ \ 6\ \ 4)$ و $x_3 = (4\ \ 11\ \ 9)$ وابسته‌ی خطی هستند، زیرا مثلاً $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$. اگر بردارها وابسته‌ی خطی نباشد، **مستقل خطی**[5] هستند. برای مثال، ستون‌های ماتریس همانی، مستقل خطی هستند.

رتبه‌ی ستونی[6] ماتریس $m\times n$ غیرصفر A، برابر با اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه از ستون‌های مستقل خطی A است. به طور مشابه، **رتبه‌ی سطری**[7] A برابر با اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه از سطرهای مستقل خطی A است. ویژگی اصلی هر ماتریس A این است که رتبه‌ی سطری آن همیشه برابر با رتبه‌ی ستونی آن است، به طوری که می‌توان فقط از رتبه‌ی A استفاده کرد. رتبه‌ی ماتریس $m\times n$، یک عدد صحیح بین 0 و $\min\{m, n\}$ یا خود این اعداد است (رتبه‌ی ماتریس صفر، برابر با صفر و رتبه‌ی ماتریس همانی $n\times n$ برابر با n است). تعریف مفید دیگر این‌است‌که، رتبه‌ی ماتریس $n\times n$ غیرصفر A، کوچک‌ترین عدد r است به طوری که ماتریس‌های B و C به ترتیب با ابعاد $m\times r$ و $r\times n$ وجود دارند:

$$A = BC.$$

1. Positive-definite 2. Noninvertible 3. Singular 4. Linear dependent
5. Linearly dependent 6. Column rank 7. Row raank

ماتریس مربعی A با ابعاد $n \times n$، در صورتی **رتبه‌ی کامل**[1] دارد که رتبه‌اش n باشد. ماتریس $n \times n$ در صورتی **رتبه‌ی ستونی کامل** دارد که رتبه‌ی آن n باشد. قضیه‌ی زیر، خاصیت مهم رتبه‌ها را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ت - ۱

ماتریس مربعی دارای رتبه‌ی کامل است اگر و فقط اگر نامنفرد باشد. ■

بردار تهی[2] برای ماتریس A ، بردار غیرصفر x است، به طوری که $Ax = 0$. قضیه‌ی زیر (که اثبات آن به عنوان تمرین ت-۲-۷ در نظر گرفته شد) و نتیجه‌ی آن، مفاهیم رتبه‌ی ستونی و منفرد بودن را با بردارهای تهی نشان می‌دهد.

قضیه‌ی ت - ۲

ماتریس A دارای رتبه‌ی ستونی کامل است اگر و فقط اگر فاقد **بردار تهی** باشد. ■

نتیجه‌ی ت - ۳

ماتریس مربعی A منفرد است اگر و فقط اگر بردار تهی داشته باشد. ■

کهاد[3] ij اُم ماتریس A با ابعاد $n \times n$، برای $n > 1$ ، برابر ماتریس $A_{[ij]}$ با ابعاد $(n-1)\times(n-1)$ است که با حذف سطر i اُم و ستون j اُم A به دست آمده است. **دترمینان** ماتریس A با ابعاد $n \times n$ را به طور بازگشتی برحسب کهادهای آن تعریف می‌کنیم:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{اگر } n = 1 \text{،} \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{[1j]}) & \text{اگر } n > 1 \text{.} \end{cases}$$

جمله‌ی $(-1)^{i+j}\det(A_{[ij]})$ را **همسازه‌ی**[4] عنصر a_{ij} می‌گویند. قضیه‌های زیر که اثبات آن‌ها ارائه نشدند، خواص اساسی دترمینان را مشخص می‌کنند.

قضیه‌ی ت - ۴ (خواص دترمینان)

دترمینان ماتریس مربعی A دارای خواص زیر است:

- اگر سطر یا ستونی از A صفر باشد، آن‌گاه $\det(A) = 0$.
- اگر تمام درایه‌های سطری (یا ستونی) از A در λ ضرب شود، دترمینان A در λ ضرب می‌شود.
- اگر در ماتریس A ، درایه‌های یک سطر (ستون) به سطر دیگر (یا ستون دیگر) اضافه شود، دترمینان A تغییر نمی‌کند.
- دترمینان A برابر با دترمینان A^T است.
- اگر دو سطر (یا دو ستون) از ماتریس A تعویض شوند، دترمینان A در 1- ضرب می‌شود.

همچنین، برای هر ماتریس مربع A و B ، داریم $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

قضیه‌ی ت - ۵

ماتریس A به ابعاد $n \times n$، منفرد است اگر و فقط اگر $\det(A) = 0$. ■

1. Full rank 2. Null vector 3. Minor 4. Cofactor

ماتریس‌های معین مثبت

ماتریس‌های معین مثبت[1]، نقش مهمی در بسیاری از کاربردها دارند. ماتریس A با ابعاد $n \times n$ در صورتی **مثبت معین** است که برای تمام بردارهای $x \neq 0$ به طول n ، داشته باشیم $x^T A x > 0$. برای مثال، ماتریس همانی، معین مثبت است، زیرا برای هر بردار غیرصفر $x = (x_1 \ \ x_2 \ \ \dots \ \ x_n)^T$ داریم:

$$\begin{aligned} x^T I_n x &= x^T x \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &> 0 . \end{aligned}$$

ماتریس‌هایی که در عمل به کار می‌روند، بنا به قضیه‌ی زیر، معین مثبت هستند.

قضیه‌ی ت - ۶

برای هر ماتریس A با رتبه‌ی ستونی کامل، ماتریس $A^T A$ معین مثبت است.

اثبات: باید نشان دهیم که برای هر بردار غیر صفر x ، داریم $x^T(A^T A)x > 0$. برای هر بردار x ، داریم:

$$\begin{aligned} x^T(A^T A)x &= (Ax)^T(Ax) \quad \text{(بنا به تمرین (ت-۱-۲))} \\ &= \|Ax\|^2 . \end{aligned}$$

توجه کنید که $\|Ax\|^2$ برابر با مجموع مربعات عناصر بردار Ax است. بنابراین $\|Ax\|^2 \geq 0$. با استقرا نشان خواهیم داد که $\|Ax\|^2 \geq 0$. اگر $\|Ax\|^2 = 0$، هر عنصر Ax برابر با صفر است که می‌گوییم $Ax = 0$. چون A دارای رتبه‌ی ستونی کامل است، قضیه‌ی ت-۲ می‌گوید که $x = 0$ که با فرض x مخالف صفر، در تضاد است. لذا $A^T A$ مثبت معین است. ■

بخش ۲۸-۳ خواص ماتریس‌های معین مثبت را تشریح می‌کند. بخش ۳۳-۳ از شرط مشابهی استفاده می‌کند که به نام مثبت نیمه معین شناخته می‌شود. ماتریس A با ابعاد $n \times n$، مثبت نیمه معین است اگر برای تمام بردارهای n عنصری $x \neq 0$ داشته باشیم $A^T x \geq 0$.

تمرین‌ها

تمرین ت-۲-۱: ثابت کنید که وارون ماتریس، یکتا است. یعنی اگر B و C وارون A باشند، آن‌گاه $B = C$.

تمرین ت-۲-۲: ثابت کنید که دترمینان ماتریس پایین‌مثلثی یا بالامثلثی برابر با ضرب عناصر قطر آن است. ثابت کنید وارون ماتریس پایین‌مثلثی، در صورت وجود پایین‌مثلثی است.

تمرین ت-۲-۳: ثابت کنید که اگر P ماتریس جایگشت باشد، آن‌گاه P وارون‌پذیر است و وارون آن P^T است و P^T یک ماتریس جایگشت است.

تمرین ت-۲-۴: فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند، به طوری که $AB = I$. ثابت کنید اگر A' از A به این صورت به دست آید که سطر i به سطر j در A اضافه شود، آن‌گاه تفریق ستون i از ستون j در ماتریس B ، وارون B' از A' را ارائه می‌دهد.

تمرین ت-۲-۵: فرض کنید A ماتریس نامنفرد $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد. نشان دهید که هر درایه‌ی A^{-1}، حقیقی است اگر و فقط اگر هر درایه‌ی A حقیقی باشد.

1. Positive-definite

تمرین ت-۲-۶: نشان دهید که اگر A ماتریس نامنفرد و متقارن $n \times n$ باشد، آن‌گاه A^{-1} متقارن است. نشان دهید که اگر B ماتریس دلخواه $m \times n$ باشد، آن‌گاه ماتریس $m \times m$ که با ضرب BAB^T به دست می‌آید، متقارن است.

تمرین ت-۲-۷: قضیه‌ی (ت-۲) را ثابت کنید. یعنی نشان دهید که ماتریس A دارای رتبه‌ی ستونی کامل است اگر و فقط اگر از $Ax = 0$ نتیجه شود که $x = 0$ (**راهنمایی:** وابستگی خطی یک ستون به بقیه را به صورت معادله‌ی ماتریس – بردار نشان دهید).

تمرین ت-۲-۸: ثابت کنید برای هر دو ماتریس سازگار A و B داریم:

$$\mathrm{rank}(AB) \leq \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)) \ ,$$

که تساوی در صورتی رخ می‌دهد که A یا B ماتریس مربع نامنفرد باشد (**راهنمایی:** از تعریف دیگر رتبه‌ی ماتریس استفاده کنید).

ت-۳ مسأله‌ها

مسأله‌ی ت-۱: ماتریس واندرموند .

با توجه به اعداد $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ، ثابت کنید که دترمینان **ماتریس واندرموند** زیر:

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

برابر است با:

$$\det(V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})) = \prod_{0 \leq j < k \leq n-1} (x_k - x_j) \ .$$

(**راهنمایی:** ستون i را در $-x_0$ ضرب کنید و آن را به ازای $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ با ستون $i+1$ جمع کنید).

مسأله‌ی ت-۲: جایگشت‌های تعریف‌شده توسط ضرب ماتریس در بردار روی GF(2) .

یک دسته از جایگشت‌های مقادیر صحیح در مجموعه‌ی $S_n = \{0,1,2,\ldots,2^n - 1\}$ توسط ضرب ماتریس بر روی GF(2) تعریف می‌شود. برای هر مقدار صحیح x در S_n، نمایش دودویی آن را به صورت بردار n بیتی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} ,$$

که $x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$. اگر A ماتریس $n \times n$ باشد که در آن، هر درایه، 0 یا 1 است، آن‌گاه می‌توان جایگشتی را تعریف کرد که هر مقدار x در S_n را به عددی نگاشت می‌کند که نمایش دودویی آن، ضرب ماتریس در بردار Ax است. در این‌جا، محاسباتی را روی GF(2) انجام می‌دهیم: تمام مقادیر، 0 یا 1 هستند و با یک استثنا، قوانین عادی جمع و ضرب اِعمال می‌شود. استثنا این‌است‌که $1 + 1 = 0$. محاسبات بر روی GF(2) را می‌توان محاسبات صحیح معمولی درنظرگرفت، با این تفاوت که فقط از بیت کم‌ارزش استفاده می‌کنیم.

به عنوان مثال، برای $S_2 = \{0,1,2,3\}$، ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس جایگشت زیر را تعریف می‌کند: $\pi_A(0) = 0, \pi_A(1) = 3, \pi_A(2) = 2, \pi_A(3) = 1$:π_A. برای این‌که ببینید $\pi_A(3) = 1$، با کارکردن در GF(2) داریم:

$$\begin{aligned} \pi_A(3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

که نمایش دودوییِ ۱ است.

برای بقیه‌ی این مسأله، روی GF(2) کار می‌کنیم و تمام درایه‌های ماتریس و بردار، 0 یا 1 هستند. رتبه‌ی ماتریس 0-1 (ماتریسی که هر درایه‌ی آن 0 یا 1 است) را روی GF(2) مثل ماتریس معمولی تعریف می‌کنیم، ولی تمام محاسباتی که استقلال خطی را تعیین می‌کند، روی GF(2) اجرا می‌شوند. **بُرد**[1] ماتریس 0-1 با ابعاد $n \times n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(A) = \{y : y = Ax \text{ for some } x \in S_n\} \ ,$$

به طوری که R(A) مجموعه‌ای از اعداد در S_n است که می‌توان با ضرب هر مقدار x در A به دست آورد که x در S_n است.

الف. اگر r رتبه‌ی ماتریس A باشد، ثابت کنید که $|R(A)| = 2^r$. نتیجه بگیرید که A در صورتی جایگشتی را بر روی S_n تعریف می‌کند که A رتبه‌ی کامل داشته باشد.

برای هر ماتریس A با ابعاد $n \times n$ و مقدار $y \in R(A)$، **پیش‌تصویر**[2] y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A, y) = \{x : Ax = y\} \ ,$$

به طوری که P(A, y) مجموعه‌ای از مقادیر در S_n است که وقتی در A ضرب می‌شود، به y نگاشت می‌شود.

ب. اگر r رتبه‌ی ماتریس A با ابعاد $n \times n$ و $y \in R(A)$ باشد، ثابت کنید $|P(A, y)| = 2^{n-r}$.

فرض کنید $0 \le m \le n$ و مجموعه‌ی S_n را به قطعه‌هایی از اعداد متوالی افراز می‌کنیم که در آن، قطعه‌ی i اُم شامل 2^m عدد $i2^m, i2^m + 1, i2^m + 2, \ldots, (i+1)2^m - 1$ است. برای هر زیرمجموعه‌ی $S \subseteq S_n$، فرض کنید B(S, m) مجموعه‌ای از قطعه‌های با اندازه‌ی 2^m از S_n باشد که شامل عناصری از S است. به عنوان مثال، وقتی $n = 3$ ، $m = 1$ و $S = \{1, 4, 5\}$ ، آن‌گاه B(S, m) شامل قطعه‌های صفر (چون یک در قطعه‌ی صفر قرار دارد) و ۲ (چون ۴ و ۵ در قطعه‌ی ۲ قرار دارند) است.

پ. فرض کنید r رتبه‌ی پایینی چپ زیر ماتریس $(n-m) \times m$ از A باشد، یعنی ماتریسی که با اشتراک $n - m$ سطر پایینی و m ستون چپ A ایجاد شده است. فرض کنید S هر بلوکی با اندازه‌ی 2^m در S_n باشد و

1. Range 2. Preimage

قرار دهید $S' = \{y : y = Ax$ ، برای $x \in S\}$. ثابت کنید $|B(S',m)| = 2^r$ و برای هر قطعه در $B(S',m)$، دقیقاً 2^{m-1} عدد در S به آن قطعه نگاشت می‌شوند.

چون ضرب بردار صفر در هر ماتریس، بردار صفر را تولید می‌کند، مجموعه‌ای از جایگشت‌های S_n که با ضرب ماتریس‌های 0-1 با ابعاد $n \times n$ با رتبه‌ی کامل روی GF(2) تعریف می‌شود، نمی‌تواند شامل تمام جایگشت‌های S_n باشد. اکنون، کلاس جایگشت‌های تعریف‌شده توسط ضرب ماتریس در بردار را تعمیم می‌دهیم تا یک جمله‌ی مجموع را دربرگیرد، به طوری که $x \in S_n$ به $Ax + c$ نگاشت شود که در آن، c بردار n بیتی و جمله‌ی مجموع بر روی GF(2) انجام می‌شود. برای مثال، ماتریس A و بردار c را که در زیر آمده است درنظربگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

با توجه به A و c ، جایگشت‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\pi_{A,c} : \pi_{A,c}(0) = 2,\ \pi_{A,c}(1) = 1, \pi_{A,c}(2) = 0, \pi_{A,c}(3) = 3$$

برای ماتریس A که یک ماتریس 0-1 با رتبه‌ی کامل است و بردار n بیتی c ، هر جایگشتی که $x \in S_n$ را به $Ax + c$ نگاشت می‌کند، **جایگشت خطی** نام دارد.

ت. با استفاده از یک **استدلال شمارشی**[1] نشان دهید که تعداد جایگشت‌های خطی S_n خیلی کمتر از تعداد جایگشت‌های S_n است.

ث. مثالی از مقدار n و جایگشت S_n ارائه دهید که با هیچ جایگشت خطی به دست نمی‌آید (راهنمایی: برای یک جایگشت خاص، راجع به ضرب ماتریس در بردار واحدی که به ستون‌های ماتریس مربوط می‌شود، فکر کنید).

1. Counting argument