بخش هشتم

پیوست‌ها: مروری بر ریاضیات

برای تحلیل الگوریتم‌ها به ابزارهای ریاضی نیاز داریم. بعضی از این ابزارها به سادگی جبر دبیرستان است، ولی بقیه ممکن‌است برای شما جدید باشد. در بخش اول، دیدیم که چگونه می‌توان نمادگذاری‌های مجانبی را پردازش کرده و رابطه‌های بازگشتی را حل کنیم. این بخش تعدادی از روش‌های دیگر برای تحلیل الگوریتم‌ها را بررسی می‌کند. همان‌طور که در مقدمه‌ی بخش اول مطرح شد، ممکن‌است لازم باشد قبل از مطالعه‌ی این کتاب، قسمت‌های زیادی از مطالب این بخش را مطالعه کنید (گرچه قواعد نمادگذاری خاصی که استفاده کردیم، ممکن‌است با آن‌چه که در جای دیگری با آن‌ها مواجه می‌شود، فرق کند). لذا، با این پیوست مثل مطالب مرجع رفتار کنید. اما همانند بقیه‌ی کتاب، تمرین‌ها و مسأله‌هایی در نظر گرفتیم تا مهارت خود را در این حوزه‌ها بهبود بخشید.

پیوست (الف) روش‌هایی را برای ارزیابی و تعیین کران مجموع‌ها ارائه می‌دهد، که غالباً در تحلیل الگوریتم‌ها ظاهر می‌شوند. بسیاری از فرمول‌های مطرح‌شده در این‌جا، در متون حساب پیدا می‌شوند، ولی بهتر است آن‌ها را با هم مطالعه کنید.

پیوست (ب) حاوی تعریف‌ها و نمادهای اصلی برای مجموعه‌ها، رابطه‌ها، توابع، گراف‌ها، و درخت‌ها است. بعضی از خواص اصلی این اشیای ریاضی را نیز ارائه می‌دهد.

پیوست (پ) با اصول اولیه‌ی شمارش شروع می‌شود. جایگشت‌ها، ترکیبیات، و امثال آن. بقیه‌ی این پیوست حاوی تعریف‌ها و ویژگی‌های احتمال پایه است. تحلیل اغلب الگوریتم‌های این کتاب به آمار نیاز ندارد، و در نتیجه می‌توانید بخش‌های آخر فصل را بار اول نادیده بگیرید (حتی بدون این‌که نگاه سطحی به آن‌ها داشته باشید). بعداً، وقتی با تحلیل آماری مواجه می‌شوید که باید آن را بهتر درک کنید، می‌توانید از پیوست (پ) به عنوان یک مرجع بهره‌مند شوید.

پیوست (ت) ماتریس‌ها، عملیات‌های آن‌ها، و بعضی از ویژگی‌های اصلی آن‌ها را تعریف می‌کند. اگر قبلاً درس جبر خطی را خوانده باشید، بخش زیادی از این مطالب را دیده‌اید، اما جمع‌شدن این مطالب در این پیوست، بهتر به شما کمک می‌کند.

پیوست الف
محاسبه‌ی مجموع‌ها

وقتی الگوریتمی شامل ساختار کنترلی تکراری مثل حلقه‌ی while یا for است، زمان اجرای آن می‌تواند بر اساس مجموع زمان‌های مصرف‌شده در هر اجرای بدنه‌ی حلقه بیان شود. به عنوان مثال، در بخش ۲-۲ دیدیم که j اُمین تکرار مرتب‌سازی درجی، در بدترین حالت به زمانی متناسب با j نیاز دارد. با جمع‌کردن زمان‌های مصرف‌شده در هر تکرار، مجموع زیر را به دست می‌آوریم: $\sum_{i=2}^{n} i$. ارزیابی این مجموع، در بدترین حالت زمان اجرای الگوریتم، منجر به کران $\Theta(n^2)$ می‌شود. این مثال اهمیت درک چگونگی دستکاری و محدودکردن مجموع را نشان می‌دهد.

بخش الف – ۱ چندین فرمول اساسیِ مرتبط با مجموع‌ها را نشان می‌دهد. بخش الف – ۲ تکنیک‌های مفیدی را برای محاسبه‌ی کران این مجموع‌ها ارائه می‌کند. فرمول‌ها در بخش الف – ۱، بدون اثبات ارائه می‌شوند، گرچه اثبات بعضی از آن‌ها در بخش الف – ۲ ارائه شد تا روش‌های آن بخش را شرح دهد. اثبات آن‌ها در کتاب‌های درسی دیفرانسیل و انتگرال وجود دارد.

الف–۱ فرمول‌های جمع و ویژگی‌های آن‌ها

با توجه به دنباله‌ی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ از اعداد، که در آن n صحیح نامنفی است، مجموع متناهی $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ می‌تواند به صورت $\sum_{k=1}^{n} a_k$ نوشته شود. اگر $n = 0$ ، مقدار مجموع، صفر تعریف می‌شود. مقدار سری‌های متناهی، همیشه خوش‌تعریف است و جملات آن می‌توانند به هر ترتیبی جمع شوند.

با توجه به دنباله‌ی متناهی $a_1, a_2, \ldots$ از اعداد، مجموع نامتناهی $a_1 + a_2 + \ldots$ می‌تواند به صورت $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ نوشته شود که به صورت $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ تفسیر می‌شود. اگر این حدّ وجود نداشته باشد، این سری **واگرا**[1] است، وگرنه **همگرا**[2] است. جملات سری‌های همگرا همیشه نمی‌توانند به هر ترتیبی جمع شوند. اما، می‌توان جملات **سری‌های همگرای مطلق**، یعنی سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ را که برای آن سری‌های $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ نیز همگرا است، جمع کرد.

خطی بودن

برای هر عدد حقیقی c و هر دنباله‌ی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$، داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} (ca_k + b_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k .$$

1. Diverge 2. Converge

این خاصیت خطی‌بودن بر روی سری‌های همگرای نامتناهی نیز قابل استفاده است.

با استفاده از ویژگی خطی‌بودن می‌توانیم محاسبه‌ی مجموع را به داخل نماد مجانبی منتقل کنیم. برای مثال:

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta(f(k)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right).$$

در این معادله، نماد Θ در سمت چپ، به متغیر k، ولی در سمت راست به n اِعمال می‌شود. این نوع پردازش می‌تواند به سری‌های همگرای نامتناهی نیز اِعمال شود.

سری‌های حسابی

مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n,$$

این سری، یک **سری حسابی** است و مقدارش به صورت زیر است:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \text{(الف-۱)}$$

$$= \Theta(n^2). \qquad \text{(الف-۲)}$$

یک **سری حسابی عمومی** شامل یک ثابت جمعی $a \geq 0$ و ضریب ثابت $b > 0$ در هر جمله می‌شود ولی همان زمان مجانبی را دارد:

$$\sum_{k=1}^{n} (a + bk) = \Theta(n^2). \qquad \text{(الف-۳)}$$

مجموع مربعات و مکعبات

فرمول‌های زیر بر مجموع مربعات و مکعبات اِعمال می‌شوند:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \text{(الف-۴)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad \text{(الف-۵)}$$

سری‌های هندسی

برای عدد حقیقی $x \neq 1$، مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

این مجموع، **سری هندسی** یا **سری نمایی** است و مقدار آن برابر است با:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \qquad \text{(الف-۶)}$$

وقتی مجموع، نامتناهی و $|x| < 1$ باشد، سری هندسی نزولی و نامتناهی زیر را داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}. \qquad \text{(الف-۷)}$$

اگر فرض کنیم $0^0 = 1$، این فرمول حتی وقتی $x = 0$ است اِعمال می‌شود.

سری‌های هارمونیک

برای مقادیر صحیح مثبت n، **عدد هارمونیک**[1] n اُم برابر است با:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{(الف-۸)}$$

$$= \ln n + O(1). \qquad \text{(الف-۹)}$$

نامعادلات (الف-۲۰) و (الف-۲۱) کران‌های قوی‌ترِ زیر را فراهم می‌کند:

$$\ln(n+1) \le H_n \le \ln n + 1\,. \qquad \text{(الف-۱۰)}$$

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری‌ها

با انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از فرمول‌های فوق، فرمول‌های دیگری برای مجموع‌یابی به دست می‌آید. به عنوان مثال، با مشتق‌گیری از طرفین سری‌های هندسی نامتناهی (الف -۷) و ضرب طرفین در x ، برای $|x| < 1$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

سری ادغامی[2]

برای هر دنباله‌ی $a_0, a_1, \ldots, a_n$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0, \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

زیرا هر جمله‌ی $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ دقیقاً یک بار جمع و یک بار تفریق می‌شود. می‌گوییم، این مجموع، **ادغامی** است.

به طور مشابه، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n\,.$$

به عنوان مثالی از مجموع ادغامی، سری زیر را درنظربگیرید:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}\,.$$

چون هر جمله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}.$$

1. Harmonic number 2. Telescoping series

تغییر اندیس مجموع‌ها

یک سری گاهی می‌تواند با تغییر اندیس آن ساده شود که معمولاً با وارون کردن مجموع انجام می‌گیرد. سری $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$ را در نظر بگیرید. چون جملات این مجموع $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ هستند، می‌توانیم ترتیب اندیس را با قرار دادن $j = n - k$ معکوس کنیم و مجموع را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} a_j \,. \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

عموماً، اگر اندیس مجموع در بدنه جمع با علامت منفی ظاهر شود، خوب است که درباره‌ی تغییر اندیس آن فکر کنیم.

به عنوان مثال، مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} \,.$$

اندیس k با علامت منفی در $1/(n-k+1)$ ظاهر می‌شود. در واقع، می‌توانیم این مجموع را ساده کنیم، این بار قرار می‌دهیم $j = n - k + 1$ و خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \,, \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

که فقط سری هارمونیک است (الف-۸).

حاصل‌ضرب‌ها

حاصل‌ضرب متناهی $a_1 a_2 \ldots a_n$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \,.$$

اگر $n = 0$، مقدار حاصل‌ضرب، برابر با یک تعریف می‌شود. می‌توان فرمول حاوی ضرب را با استفاده از اتحاد زیر، به مجموع تبدیل کرد:

$$\lg\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lg a_k \,.$$

تمرین‌ها

تمرین الف-۱-۱: با استفاده از ویژگی خطی بودن مجموع، ثابت کنید که $\sum_{k=1}^{n} O(f_k(i)) = O\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(i)\right)$.

تمرین الف-۱-۲: فرمول ساده‌ای برای $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$ بیابید.

تمرین الف-۱-۳: عدد دهدهی $111{,}111{,}111$ را بر اساس معادله‌ی (الف-۶) تفسیر کنید.

تمرین الف-۱-۴: سری متناهی $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$ را ارزیابی کنید.

تمرین الف-۱-۵: فرض کنید $c \geq 0$ ثابت است. نشان دهید $\sum_{k=1}^{n} k^c = \Theta(n^{c+1})$.

تمرین الف-۱-۶: برای $|x| < 1$، نشان دهید که $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = x(1+x)/(1-x)^3$.

تمرین الف-۱-۷: ثابت کنید $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \lg k} = \Theta(n^{3/2} \lg^{1/2} n)$ (راهنمایی: کران‌های بالا و پایین مجانبی را به طور جداگانه نشان دهید).

★ **تمرین الف-۱-۸:** نشان دهید که $\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) = \ln(\sqrt{n}) + O(1)$. برای این کار، از سری هارمونیک استفاده کنید.

★ **تمرین الف-۱-۹:** نشان دهید که $\sum_{k=0}^{\infty} (k-1)/2^k = 0$.

★ **تمرین الف-۱-۱۰:** مجموع $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k}$ را برای $|x|<1$ ارزیابی کنید.

★ **تمرین الف-۱-۱۱:** حاصل‌ضرب $\prod_{k=2}^{n}(1-1/k^2)$ را ارزیابی کنید.

الف-۲ محاسبه‌ی کران مجموع‌ها

تکنیک‌های مختلفی برای **تعیین کران**[1] مجموع‌هایی که زمان‌های اجرای الگوریتم‌ها را توصیف می‌کنند، وجود دارد.

استقرای ریاضی

ساده‌ترین روش ارزیابی سری، استفاده از استقرای ریاضی است. به عنوان مثال، ثابت می‌کنیم که مجموع سری حسابی $\sum_{k=1}^{n}k$، برابر با $n(n+1)/2$ است. برای $n=1$، داریم $n(n+1)/2=1\,.\,2/2=1$ که برابر با $\sum_{k=1}^{1}k$ است. یک فرض استقرا می‌سازیم که بیان می‌کند برای n برقرار است و ثابت می‌کنیم برای $n+1$ نیز برقرار است. داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k &= \sum_{k=1}^{n}k + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.\end{aligned}$$

برای استفاده از استقرای ریاضی، همیشه لازم نیست مقدار دقیق مجموع را حدس بزنیم. استقرا می‌تواند برای اثبات کران‌ها نیز به کار رود. به عنوان مثال، ثابت می‌کنیم که $\sum_{k=0}^{n}3^k=O(3^n)$. به طور خاص، برای ثابت c، اثبات می‌کنیم که $\sum_{k=0}^{n}3^k\le c3^n$. برای شرط اولیه‌ی $n=0$ تا زمانی که $c\ge 1$ است، داریم $\sum_{k=0}^{0}3^k=1\le c$. با فرض این‌که این کران‌ها برای n برقرار است، ثابت می‌کنیم برای $n+1$ برقرار است. داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}3^k &= \sum_{k=0}^{n}3^k+3^{n+1}\\ &\le c3^n+3^{n+1} \qquad \text{(بنا به فرض استقرا)}\\ &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{c}\right)c3^{n+1}\\ &\le c3^{n+1}\end{aligned}$$

به شرطی که $(1/3+1/c)\le 1$ یا معادل آن، $c\ge 3/2$ باشد، خواهیم داشت: $\sum_{k=0}^{n}3^k=O(3^n)$.

وقتی از نمادگذاری مجانبی برای اثبات کران‌ها از طریق استقرا استفاده می‌کنیم، باید دقت کافی به خرج دهیم. اثبات نادرست $\sum_{k=1}^{n}k=O(n)$ را که در زیر آمده است در نظر بگیرید. یقیناً، $\sum_{k=1}^{1}k=O(1)$. با توجه به کران مربوط به n، آن را برای $n+1$ اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k &= \sum_{k=1}^{n}k+(n+1)\\ &= O(n)+(n+1) \qquad \Longleftarrow \textbf{نادرست!!}\\ &= O(n+1)\,.\end{aligned}$$

1. Bounding

اشکال این است که **ثابت** مخفی‌شده در نمادگذاری O بزرگ، با n رشد می‌کند ودر نتیجه، ثابت نیست. نشان ندادیم که ثابت یکسان برای تمام **nها** درست کار می‌کند.

محاسبه‌ی کران جمله‌ها

گاهی، کران بالای خوب مربوط به سری، می‌تواند با تعیین کران هر جمله‌ی سری به دست آید، و اغلب کافی است از بزرگ‌ترین جمله برای کران‌دارکردن جمله‌های دیگر استفاده کنیم. به عنوان مثال، کران بالای سریع بر روی سری حسابی (الف– ۱)، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &\le \sum_{k=1}^{n} n \\ &= n^2.\end{aligned}$$

به طور کلی، برای سری $\sum_{k=1}^{n} a_k$، اگر قرار دهیم $a_{max} = \max\{a_k : 1 \le k \le n\}$، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le n \cdot a_{max} .$$

وقتی یک سری بتواند توسط یک سری هندسی کران‌دار شود، تکنیک کران‌دار کردن هر جمله‌ی سری توسط بزرگ‌ترین جمله، **روش ضعیفی** است. با توجه به سری $\sum_{k=0}^{n} a_k$، فرض کنید برای تمام $k \ge 0$ داریم $a_{k+1}/a_k \le r$، که در آن $0 < r < 1$ ثابت است. این مجموع می‌تواند توسط سری هندسی نزولی نامتناهی کران‌دار شود، زیرا $a_k \le a_0 r^k$ و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &\le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k && \text{(الف–۱۵)} \\ &= a_0 \frac{1}{1-r} . && \text{(الف–۱۶)}\end{aligned}$$

می‌توان این روش را برای کران‌دار کردن مجموع $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k)$ استفاده کرد. به منظور شروع مجموع در $k = 0$، آن را به صورت $\sum_{k=0}^{\infty}((k+1)/3^{k+1})$ بازنویسی می‌کنیم. جمله‌ی اول (a_0) برابر 1/3 است و نسبت (r) جملات متوالی، برای $k \ge 0$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{(k+2)/3^{k+2}}{(k+1)/3^{k+1}} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{k+2}{k+1} \\ &\le \frac{2}{3}\end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} \\ &\le \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} \\ &= 1 .\end{aligned}$$

اشتباه متداول در این روش این نکته است که نشان می‌دهیم نسبت جملات متوالی آن کوچک‌تر از ۱ است و سپس فرض کنیم که مجموع توسط سری هندسی کران‌دار می‌شود. نمونه‌ای از آن، سری هارمونیک نامتناهی است، که واگرا است، زیرا داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\Theta(\lg n)\\ &= \infty .\end{aligned}$$

نسبت $(k+1)$ اُمین و k اُمین جمله در این سری، برابر با $k/(k+1)<1$ است، اما این سری توسط سری هندسی نزولی کران‌دار نمی‌شود. برای کران‌دار کردن یک سری توسط سری هندسی، باید نشان دهیم که یک $r<1$ وجود دارد که ثابت است، به طوری که نسبت تمام جفت جملات متوالی، هرگز از r بزرگ‌تر نیست. در سری هارمونیک، چنین r وجود ندارد، زیرا این نسبت خیلی به ۱ نزدیک می‌شود.

تجزیه‌ی مجموع‌ها[1]

یک روش به دست آوردن کران‌ها روی مجموع‌های دشوار، بیان سری به صورت مجموع دو یا چند سری از طریق تجزیه‌ی بازه‌ی اندیس و سپس کران‌دار کردن هر سری حاصل است. به عنوان مثال، فرض کنید سعی می‌کنیم یک کران پایین بر روی سری حسابی $\sum_{k=1}^{n}k$ پیدا کنیم، که قبلاً نشان داده شد که کران بالای آن n^2 است. ممکن‌است سعی کنیم هر جمله در مجموع را توسط کوچک‌ترین جمله کران‌دار کنیم، اما چون آن جمله یک است، کران پایینی بر روی n را برای مجموع به دست می‌آوریم، که خیلی دور از کران بالای n^2 است.

اگر ابتدا مجموع را تجزیه کنیم، می‌توانیم کران پایین بهتری را به دست آوریم. برای سهولت فرض کنید که n زوج است. چون داریم $\sum_{k=1}^{n}k=O(n^2)$، کران زیر، کران قوی مجانبی است:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k &= \sum_{k=1}^{n/2}k+\sum_{k=n/2+1}^{n}k\\ &\geq \sum_{k=1}^{n/2}0+\sum_{k=n/2+1}^{n}\frac{n}{2}\\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^2\\ &= \Omega(n^2) ,\end{aligned}$$

برای مجموعی که از تحلیل الگوریتم به دست می‌آید، اغلب این مجموع را تجزیه می‌کنیم و تعداد ثابتی از جملات اولیه‌ی آن را در نظر نمی‌گیریم. معمولاً این تکنیک وقتی اِعمال می‌شود که هر جمله‌ی a_k در مجموع $\sum_{k=0}^{n}a_k$ ، مستقل از n باشد. سپس برای هر ثابت $k_0>0$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}a_k &= \sum_{k=0}^{k_0-1}a_k+\sum_{k=k_0}^{n}a_k\\ &= \Theta(1)+\sum_{k=k_0}^{n}a_k ,\end{aligned}$$

1. splitting summations

زیرا تمام جملات اولیه‌ی این مجموع، ثابت هستند و تعداد آن‌ها نیز ثابت است. سپس با استفاده از روش‌های دیگر می‌توان $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$ را کران‌دار کرد. این تکنیک به مجموع‌های نامتناهی نیز اِعمال می‌شود. به عنوان مثال، برای یافتن کران بالای مجانبی بر روی مجموع $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k$ مشاهده می‌شود که اگر $k \geq 3$ باشد، نسبت جملات متوالی عبارت است از:

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} &= \frac{(k+1)^2}{2k^2} \\ &\leq 8/9\end{aligned}$$

بنابراین، مجموع می‌تواند به صورت زیر تجزیه شود:

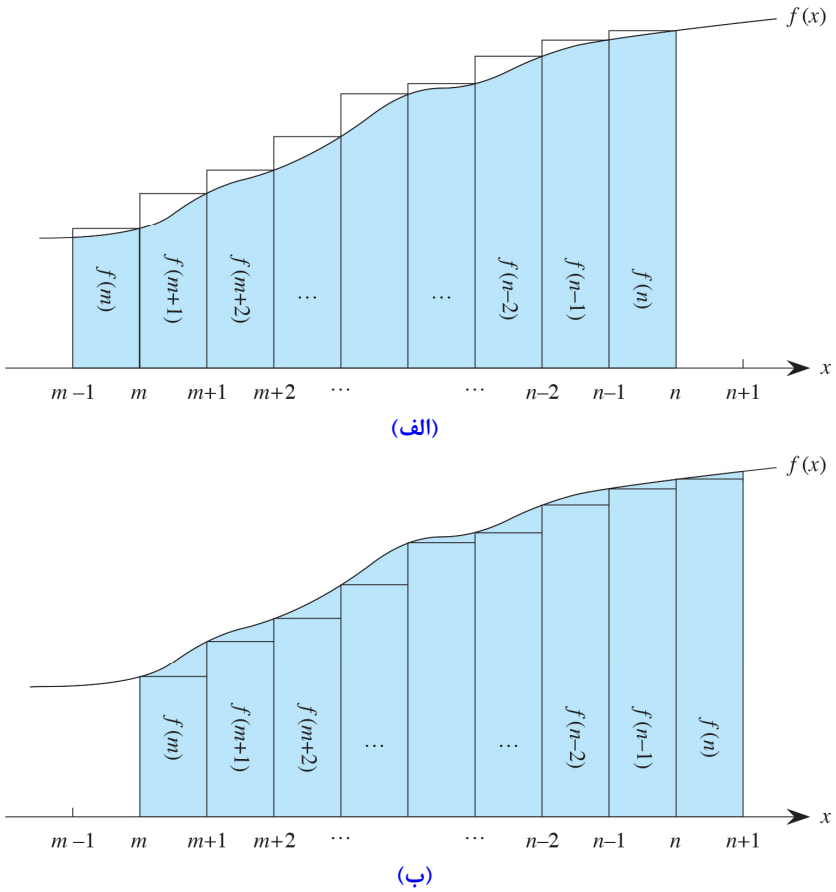
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k} &= \sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{k^2}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+3)^2}{2^{k+3}} && \text{(با تغییر اندیس)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k} + \frac{9}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^k && \text{(بنا به نامعادله (الف-۱۵))} \\ &= (0+1/2+1) + \frac{9/8}{1-8/9} && \text{(بنا به نامعادله (الف-۱۶))} \\ &= O(1)\,.\end{aligned}$$

تکنیک تجزیه‌ی مجموع می‌تواند برای تعیین کران‌های مجانبی در وضعیت‌های دشوارتر به کار رود. به عنوان مثال، می‌توان کران $O(\lg n)$ را روی سری هارمونیک به دست آورد (الف – ۹):

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,.$$

این کار را با تجزیه‌ی بازه‌ی 1 تا n به $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ قطعه و تعیین کران بالای هر قطعه با مقدار سهم ۱ انجام می‌دهیم. برای $i = 0,1,\ldots,\lfloor \lg n \rfloor$ ، قطعه‌ی i اُم شامل جملاتی است که در $1/2^i$ شروع می‌شود و به سمت بالا می‌رود ولی شامل $1/2^{i+1}$ نمی‌شود. ممکن است آخرین قطعه شامل جملاتی باشد که در سری‌های هارمونیک اصلی قرار ندارند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i+j} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor}\left(2^i\cdot\frac{1}{2^i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 1 \\ &\leq \lg n + 1\,. && \text{(الف-۱۷)}\end{aligned}$$



شکل الف – ۱ تقریب $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ به وسیله‌ی انتگرال. مساحت هر مستطیل در داخل مستطیل نشان داده شده است، و کل مساحت مستطیل، مقدار مجموع را نشان می‌دهد. انتگرال توسط ناحیه‌ی سایه‌دار زیر منحنی نشان داده شده است. با مقایسه‌ی مساحت‌ها در (الف)، خواهیم داشت $\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k)$ و سپس با انتقال مستطیل به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست، در (ب) خواهیم داشت $\sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx$.

تقریب‌زدن با انتگرال‌ها

وقتی مجموع بتواند به صورت $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ بیان شود که در آن f(k) تابع یکنواخت صعودی باشد، می‌توان آن را با انتگرال تقریب زد:

$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx. \qquad \text{(الف–۱۸)}$$

این تقریب در شکل الف–۱ نشان داده شده است. مجموع به صورت مساحت مستطیل‌ها در شکل نمایش داده می‌شوند، و انتگرال، ناحیه‌ی سایه‌دار زیر منحنی است. هرگاه f(k) یک تابع یکنواخت نزولی باشد، می‌توان از روش مشابهی برای تعیین کران‌های استفاده کرد:

$$\int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)\,dx. \qquad \text{(الف–۱۹)}$$

تقریب انتگرال (الف-۱۹)، تخمین دقیقی را در معادله (الف-۱۰) برای n اُمین عدد هارمونیک ارائه می‌دهد. برای کران پایین، داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &\geq \int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}\\ &= \ln(n+1)\,.\end{aligned} \tag{الف-۲۰}$$

برای کران بالا، تقریب انتگرال نامساوی زیر را به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+1\\ &\leq \int_{1}^{n}\frac{dx}{x}+1\\ &= \ln n+1\,.\end{aligned} \tag{الف-۲۱}$$

تمرین‌ها

تمرین الف-۲-۱: نشان دهید که $\sum_{k=1}^{n}1/k^2$ از بالا با یک مقدار ثابت کران‌دار شده است.

تمرین الف-۲-۲: کران بالای مجانبی را بر روی مجموع زیر به دست آورید:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \lg n\rfloor}\lceil n/2^k\rceil\,.$$

تمرین الف-۲-۳: از طریق تجزیه‌ی مجموع، نشان دهید که عدد n اُم هارمونیک برابر است با $\Omega(\lg n)$.

تمرین الف-۲-۴: تقریب $\sum_{k=1}^{n}k^3$ را با انتگرال به دست آورید.

تمرین الف-۲-۵: چرا برای به دست آوردن کران بالا بر روی n اُمین عدد هارمونیک از تقریب انتگرال (الف-۱۹) به طور مستقیم روی $\sum_{k=1}^{n}1/k$ استفاده نمی‌کنیم؟

الف-۳ مسأله‌ها

مسأله‌ی الف-۱: کران‌دار کردن مجموع‌ها.

کران‌های دقیق مجانبی را برای مجموع‌های زیر مشخص کنید. فرض کنید $r\geq 0$ و $s\geq 0$ ثابت هستند.

الف. $\sum_{k=1}^{n}k^r$

ب. $\sum_{k=1}^{n}\lg^s k$

پ. $\sum_{k=1}^{n}k^r\lg^s k$