پیوست دوم

حل معادلات بازگشتی: با کاربردهای تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی

تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی به سادگی الگوریتم‌های تکراری نیست. معمولاً نمایش تحلیل پیچیدگی زمانی الگوریتم بازگشتی توسط معادلات بازگشتی دشوار نیست. معادله بازگشتی باید حل شود تا پیچیدگی زمانی مشخص گردد. تکنیک‌هایی را برای حل چنین معادلات و استفاده از این راه‌حل‌ها در تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی بررسی خواهیم کرد.

ب ـ ۱ حل بازگشتی با استفاده از استقرا

استقرای ریاضی در پیوست اول بحث شد. در این‌جا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از آن در تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی استفاده کرد. ابتدا الگوریتم بازگشتی را برای محاسبه !n درنظرمی‌گیریم.

الگوریتم ب ـ ۱ فاکتوریل

مسئله: یعنی $n! = n(n-1)(n-2) \ldots (3)(2)(1)$ وقتی $n \geq 1$ است.

ورودی‌ها: عدد صحیح غیرمنفی n.

خروجی‌ها: !n.

```
int fact (int n)
{
    if (n = = 0)
        return 1;
    else
        return n * fact(n - 1);
}
```

برای بررسی کارایی این الگوریتم، مشخص می‌کنیم که این تابع برای هر مقدار n، چند بار دستور ضرب را انجام می‌دهد. برای یک n معین، تعداد ضرب‌هایی که انجام می‌شود برابر است با تعداد ضرب‌های انجام‌شده در فراخوانی fact(n - 1) به اضافه عمل ضرب n در fact(n - 1) است. اگر تعداد ضرب‌های انجام‌شده برای یک مقدار معین n را با t_n نمایش دهیم، داریم:

$$t_n = \underbrace{t_{n-1}}_{\substack{\text{تعداد ضرب‌ها در}\\ \text{فراخوانی بازگشتی}}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{ضرب در}\\ \text{بالاترین سطح}}}$$

چنین معادله‌ای را **معادله بازگشتی** می‌گویند، زیرا مقدار تابع در n برحسب مقدار تابع در مقدار کوچک‌تری از n مشخص می‌شود. بازگشتی، در واقع، یک تابع نیست. علاوه‌براین، باید یک نقطه شروع به‌نام **شرط اولیه** داشته باشیم. در این الگوریتم، وقتی n = 0 باشد هیچ ضربی صورت نمی‌گیرد. لذا، شرط اولیه $t_0 = 0$ است. می‌توانیم t_n را برای مقدار بزرگ n به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$t_1 = t_{1-1} + 1 = t_0 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$t_2 = t_{2-1} + 1 = t_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$t_3 = t_{3-1} + 1 = t_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

با ادامه این روند، مقداری بیشتر از t_n را به‌دست‌می‌آوریم، اما برای یک مقدار دلخواه n، بدون شروع از صفر نمی‌توانیم t_n را محاسبه کنیم. به یک عبارت صریح برای t_n نیازمندیم. چنین عبارتی، **حل** معادله بازگشتی نام دارد. توجه کنید که از طریق استقرا نمی‌توان حلی را برای این معادله پیدا کرد. استقرا فقط می‌تواند بررسی کند یک حلِ ممکن، درست است (استقرای سازنده که در بخش ۸-۵-۴ بحث شد، در کشف یک حل به ما کمک می‌کند). با بررسی چند مقدار اولیه می‌توانیم حل کاندیدایی را برای معادله پیدا کنیم. بررسی مقادیر محاسبه‌شده نشان می‌دهد که $t_n = n$ یک حل است. اکنون که یک حل کاندیدا داریم، با استفاده از استقرا می‌توانیم ثابت کنیم که درست است.

پایه‌ی استقرا: برای n = 0 داریم:

$$t_0 = 0$$

فرض استقرا: فرض کنید برای یک عدد صحیح و مثبت دلخواه n داریم:

$$t_n = n$$

گام استقرا: باید نشان دهیم که:

$$t_{n+1} = n + 1$$

اگر n + 1 را در بازگشتی وارد کنیم، داریم:

$$t_{n+1} = t_{(n+1)-1} + 1 = \boldsymbol{t_n} + 1 = \boldsymbol{n} + 1$$

به‌این‌ترتیب، ثابت می‌شود که حل کاندیدای t_n درست است. توجه کنید که جملات پررنگ از فرض استقرا نتیجه می‌شوند.

در الگوریتم‌های بازگشتی دو مرحله وجود دارد. مرحله اول، تعیین بازگشتی و مرحله دوم حل آن است. هدف ما این است‌که چگونگی حل بازگشتی‌ها را نشان دهیم. در این کتاب، هر وقت در مورد الگوریتم‌ها بحث می‌کنیم، معادلات بازگشتی را تعیین می‌کنیم. لذا، در ادامه این پیوست، الگوریتم‌ها را بحث نمی‌کنیم، بلکه فقط معادلات بازگشتی را تعیین می‌کنیم. در ادامه، مثال‌هایی از حل بازگشتی‌ها از طریق استقرا ارائه می‌کنیم.

- **مثال ب ـ ۱** بازگشتی زیر را درنظربگیرید:

$t_n = t_{n/2} + 1$	n توانی از 2 است و $n > 1$
$t_1 = 1$	

چند مقدار اولیه عبارت‌انداز:

$$t_2 = t_{2/2} + 1 = t_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$t_4 = t_{4/2} + 1 = t_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$t_8 = t_{8/2} + 1 = t_4 + 1 = 3 + 1 = 4$$
$$t_{16} = t_{16/2} + 1 = t_8 + 1 = 4 + 1 = 5$$

نتیجه می‌شود که:

$$t_n = \lg n + 1$$

با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم که حل درست است.

پایه‌ی استقرا: برای $n = 1$ داریم:

$$t_1 = 1 = \lg 1 + 1$$

فرض استقرا: فرض کنید برای مقدار دلخواه $n > 0$ که n توانی از ۲ است داریم:

$$t_n = \lg n + 1$$

گام استقرا: چون بازگشتی برای توانی از ۲ است، عدد بعدی که باید درنظرگرفته شود 2n است. لذا، باید نشان دهیم:

$$t_{2n} = \lg(2n) + 1$$

اگر 2n را در بازگشتی قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} t_{2n} &= t_{(2n)/2} + 1 = \boldsymbol{t_n} + 1 = \mathbf{lg}\,\boldsymbol{n} + \mathbf{1} + 1 \\ &= \lg n + \lg 2 + 1 \\ &= \lg(2n) + 1 \end{aligned}$$

- **مثال ب ـ ۲** بازگشتی زیر را درنظربگیرید:

$t_n = 7t_{n/2} + 1$	n توانی از 2 است و $n > 1$
$t_1 = 1$	

چند مقدار اولیه عبارت‌انداز:

$$t_2 = 7t_{2/2} = 7t_1 = 7$$
$$t_4 = 7t_{4/2} = 7t_2 = 7^2$$
$$t_8 = 7t_{8/2} = 7t_4 = 7^3$$
$$t_{16} = 7t_{16/2} = 7t_8 = 7^4$$

نتیجه می‌شود که:

$$t_n = 7^{\lg n}$$

با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم که حل درست است.

پایه‌ی استقرا: برای $n = 1$ داریم:

$$t_1 = 1 = 7^0 = 7^{\lg 1}$$

فرض استقرا: فرض کنید برای هر مقدار دلخواه $n > 0$ که n توانی از ۲ است داریم:

$$t_n = 7^{\lg n}$$

گام استقرا: باید نشان دهیم:

$$t_{2n} = 7^{\lg(2n)}$$

اگر 2n را در بازگشتی قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم:

$$t_{2n} = 7t_{(2n)/2} = \boldsymbol{7t_n} = 7 \times \boldsymbol{7^{\lg n}} = 7^{1+\lg n} = 7^{\lg 2+\lg n} = 7^{\lg(2n)}$$

به‌این ترتیب، استقرا ثابت می‌شود. سرانجام، چون:

$$7^{\lg n} = n^{\lg 7}$$

حل این بازگشتی همواره به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$t_n = n^{\lg 7} \approx n^{2.81}$$

- **مثال ب-۳** بازگشتی زیر را درنظربگیرید:

$t_n = 2t_{n/2} + n - 1$ n توانی از 2 است و $n > 1$

$t_1 = 0$

چند مقدار اولیه عبارت‌انداز:

$$\begin{aligned} t_2 &= 2t_{2/2} + 2 - 1 = 2t_1 + 1 = 1 \\ t_4 &= 2t_{4/2} + 4 - 1 = 2t_2 + 3 = 5 \\ t_8 &= 2t_{8/2} + 8 - 1 = 2t_4 + 7 = 17 \\ t_{16} &= 2t_{16/2} + 16 - 1 = 2t_8 + 15 = 49 \end{aligned}$$

حل کاندیدای واضحی توسط این مقادیر ارائه نمی‌شود. همان‌طور که گفته شد استقرا فقط می‌تواند بررسی کند که حل درست است. چون حل کاندیدایی وجود ندارد، برای این بازگشتی نمی‌توانیم از استقرا استفاده کنیم. اما، با تکنیک‌هایی که در بخش‌های بعدی بحث می‌شوند، می‌توان آن را حل کرد.

ب-۲ بازگشتی با استفاده از معادله مشخصه

تکنیکی را برای تعیین حل‌هایی برای دسته بزرگی از بازگشتی‌ها ارائه می‌کنیم.

ب-۲-۱ بازگشتی‌های خطی همگن

تعریف بازگشتی زیر را درنظربگیرید که در آن k و a_i ثابت‌اند:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

این بازگشتی، **معادله خطی همگن با ضرایب همگن** نام دارد.

علت "خطی"بودن این معادله این است‌که هر جمله t_i با توان اول خود ظاهر می‌شود. یعنی، جملاتی مثل t_{n-i}^2 و $t_{n-i}t_{n-j}$ وجود ندارد. علاوه‌براین، عناصری مثل $t_{c(n-i)}$ که در آن c یک مقدار ثابت غیر از یک باشد، در آن مشاهده نمی‌شود. به‌عنوان‌مثال، ممکن است جملاتی نظیر $t_{n/2}$ و $t_{3(n-4)}$ در آن نباشد. علت "همگن‌بودن" این معادله این است‌که ترکیب خطی از جملات برابر با صفر است.

- **مثال ب ـ ٤** معادلات زیر، بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت‌اند:

$$\begin{aligned} 7t_n - 3t_{n-1} &= 0 \\ 6t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} &= 0 \\ 8t_n - 4t_{n-3} &= 0 \end{aligned}$$

- **مثال ب ـ ۵** دنباله فیبوناچی که در بخش ۲ـ۲ـ۱ بحث شد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + t_{n-2} \\ t_0 &= 0 \\ t_1 &= 1 \end{aligned}$$

اگر t_{n-1} و t_{n-2} را از دو طرف کم کنیم، داریم:

$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$

که نشان می‌دهد دنباله فیبوناچی توسط یک بازگشتی خطی همگن تعریف شده است.

- **مثال ب ـ ۶** فرض کنید بازگشتی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} &= 0 \qquad \text{for } n > 1 \\ t_0 &= 0 \\ t_1 &= 1 \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $t_n = r^n$ آن‌گاه داریم:

$$t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2}$$

بنابراین، $t_n = r^n$ حلی برای این بازگشتی است اگر r ریشه معادله زیر باشد:

$$r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = 0$$

چون داریم:

$$r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = r^{n-2}\left(r^2 - 5r + 6\right)$$

یکی از ریشه‌ها $r = 0$ و بقیه، ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \qquad \text{(ب ـ ۱)}$$

این ریشه‌ها را می‌توان با تجزیه به‌دست‌آورد:

$$r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$$

ریشه‌های این معادله $r = 3$ و $r = 2$ است. بنابراین، موارد زیر، حل‌های معادله بازگشتی‌اند:

$$t_n = 0, \quad t_n = 3^n, \quad \text{and} \quad t_n = 2^n$$

این حل را برای 3^n و با جایگزینی آن در سمت چپ بازگشتی بررسی می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccc} 3^n & & 3^{n-1} & & 3^{n-2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ t_n & - & 5t_{n-1} & + & 6t_{n-2} \end{array}$$

با این جایگزینی، سمت چپ معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} 3^n - 5\left(3^{n-1}\right) + 6\left(3^{n-2}\right) &= 3^n - 5\left(3^{n-1}\right) + 2\left(3^{n-1}\right) \\ &= 3^n - 3\left(3^{n-1}\right) = 3^n - 3^n = 0 \end{aligned}$$

معنایش این است‌که 3^n حلی برای معادله بازگشتی است.

سه راه‌حل برای معادله بازگشتی به‌دست‌آوردیم، اما حل‌های بیشتری داریم، زیرا اگر 3^n و 2^n حل‌های این معادله باشند، آن‌گاه داریم:

$$t_n = c_1 3^n + c_2 2^n$$

که در آن، c_1 و c_2 ثوابت دلخواهی‌اند. این نتیجه در تمرین‌ها به‌دست‌آمده است. گرچه آن را در این‌جا نشان ندادیم، می‌توان نشان داد که این‌ها تنها حل‌ها هستند. بنابراین، این عبارت یک حل کلی برای بازگشتی است (اگر $c_1 = c_2 = 0$ باشد، حل $t_n = 0$ به این حل کلی اضافه می‌شود). تعداد حل‌ها نامحدود است، اما کدام‌یک از آن‌ها پاسخ مسئله‌اند؟ این پاسخ با توجه به شرایط اولیه تعیین می‌شود. به یاد دارید که شرایط اولیه عبارت بودند از:

$$t_0 = 0 \qquad \text{و} \qquad t_1 = 1$$

این دو شرط، مقادیر یکتایی را برای c_1 و c_2 تعیین می‌کنند. اگر حل کلی را به هر کدام اِعمال کنیم، دو معادله زیر را به‌دست‌می‌آوریم:

$$\begin{aligned} t_0 &= c_1 3^0 + c_2 2^0 = 0 \\ t_1 &= c_1 3^1 + c_2 2^1 = 1 \end{aligned}$$

این دو معادله به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 &= 1 \end{aligned}$$

حل این سیستم معادلات $c_1 = 1$ و $c_2 = -1$ است. لذا، حل بازگشتی موردنظر ما برابر است با:

$$t_n = 1\left(3^n\right) - 1\left(2^n\right) = 3^n - 2^n$$

اگر در مثال قبلی شرایط اولیه متفاوتی داشتیم، به حل دیگری می‌رسیدیم. بازگشتی، در واقع دسته‌ای از توابع را نشان می‌دهد که هر کدام به شرایط اولیه مختلفی مربوط می‌شوند. ببینیم اگر از مقادیر اولیه زیر در مثال ب ـ ۶ استفاده کنیم به چه تابعی می‌رسیم:

$$t_0 = 1 \qquad \text{و} \qquad t_1 = 2$$

با اِعمال حل کلی مثال ب ـ ۶ به هر یک از این شرایط، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} t_0 &= c_1 3^0 + c_2 2^0 = 1 \\ t_1 &= c_1 3^1 + c_2 2^1 = 2 \end{aligned}$$

این دو معادله به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$c_1 + c_2 = 1$$
$$3c_1 + 2c_2 = 2$$

با حل این سیستم $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ است، لذا، حل بازگشتی موردنظر ما با این مقادیر اولیه عبارت است از:

$$t_n = 0\,(3^n) + 1\,(2^n) = 2^n$$

معادله **ب ـ ۱** در مثال **ب ـ ۶** معادله مشخصه آن بازگشتی است. به‌طورکلی، این معادله به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف **معادله مشخصه** مربوط به معادله بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت زیر را درنظربگیرید:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

این معادله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k r^0 = 0$$

مقدار r^0 برابر با یک است. این جمله را به صورت r^0 می‌نویسیم تا رابطه بین معادله مشخصه و بازگشتی را نشان دهیم.

• **مثال ب ـ ۷** یک بازگشتی و معادله مشخصه آن را که در زیر آمده است مشاهده کنید:

$$5t_n - 7t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0$$
$$5r^2 - 7r + 6 = 0$$

با استفاده از پیکان نشان می‌دهیم که مرتبه معادله مشخصه k (در این حالت) ۲ است.

مراحل به‌دست‌آوردن حل در مثال ب ـ ۶ می‌تواند به یک قضیه تعمیم داده شود. برای حل بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت، فقط کافی است به این قضیه مراجعه شود.

◀ قضیه ب ـ ۱

معادله بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت زیر را درنظربگیرید:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

معادله مشخصه آن برابر است با:

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k r^0 = 0$$

این معادله k حل متمایز $r_1, r_2, \ldots, r_k$ دارد. آن‌گاه تنها حل‌های بازگشتی آن عبارت است از:

$$t_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \cdots + c_k r_k^n$$

که در آن، c_i جمله، ثوابت دلخواهی اند.

مقادیر k ثابت c_i توسط شرایط اولیه تعیین می‌شوند. برای محاسبه k ثابت یکتا، به k شرط اولیه نیاز داریم. روش تعیین مقادیر ثوابت در مثال‌های زیر آمده است.

• **مثال ب ـ ۸** بازگشتی زیر را درنظربگیرید:

$$\begin{aligned} t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} &= 0 \qquad \text{for } n > 1 \\ t_0 &= 0 \\ t_1 &= 1 \end{aligned}$$

۱. معادله مشخصه زیر را به‌دست‌آورید:

$$\begin{aligned} t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} &= 0 \\ r^2 - 3r - 4 &= 0 \end{aligned}$$

۲. معادله مشخصه زیر را حل کنید:

$$r^2 - 3r - 4 = (r-4)(r+1) = 0$$

ریشه‌های آن عبارت‌اند از $r = 4$ و $r = -1$.

۳. قضیه ب ـ ۱ را اِعمال کنید تا حل کلی بازگشتی زیر را به‌دست‌آورید:

$$t_n = c_1 4^n + c_2 (-1)^n$$

۴. مقادیر ثوابت را با اِعمال حل کلی به مقادیر اولیه به‌دست‌آورید:

$$t_0 = 0 = c_1 4^0 + c_2 (-1)^0$$
$$t_1 = 1 = c_1 4^1 + c_2 (-1)^1$$

این مقادیر به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ 4c_1 - c_2 &= 1 \end{aligned}$$

حل این سیستم $c_1 = \frac{1}{5}$ و $c_2 = \frac{-1}{5}$ است.

۵. ثوابت را در حل کلی جایگزین کنید تا حل خاصی را به‌دست‌آورید:

$$t_n = \frac{1}{5}4^n - \frac{1}{5}(-1)^n$$

• **مثال ب ـ ۹** بازگشتی‌ای را حل می‌کنیم که دنباله فیبوناچی را تولید می‌کند:

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} - t_{n-2} &= 0 \qquad \text{for } n > 1 \\ t_0 &= 0 \\ t_1 &= 1 \end{aligned}$$

۱. تابع مشخصه را به‌دست‌آورید:

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} - t_{n-2} &= 0 \\ r^2 - r - 1 &= 0 \end{aligned}$$

۲. معادله مشخصه را حل کنید:

با توجه به فرمول حل معادله درجه دوم، ریشه‌های معادله مشخصه عبارت‌اند از:

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{و} \qquad r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

۳. برای به‌دست‌آوردن حل کلی بازگشتی زیر، قضیه ب ـ ۱ را اعمال کنید:

$$t_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

۴. با اِعمال حل کلی به شرایط اولیه، مقادیر ثوابت را به‌دست‌آورید:

$$t_0 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$$

$$t_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

این معادلات به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$c_1 + \qquad c_2 = 0$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2 = 1$$

با حل این سیستم خواهیم داشت $c_1 = 1/\sqrt{5}$ و $c_2 = -1/\sqrt{5}$.

۵. با جایگزینی ثوابت در حل کلی، حل ویژه را به‌دست می‌آوریم:

$$t_n = \frac{\left[\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right]^n - \left[\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right]^n}{\sqrt{5}}$$

گرچه مثال ب ـ ۹ فرمول صریحی را برای جمله nاُم فیبوناچی فراهم می‌کند، ارزش عملی آن کم است، زیرا درجه دقت لازم برای نمایش $\sqrt{5}$ با افزایش n افزایش می‌یابد.

در قضیه ب ـ ۱ لازم است تمام k ریشه‌ی معادله مشخصه متمایز باشند. این قضیه، تابع مشخصه‌ای به شکل زیر را مجاز نمی‌داند:

$$(r-1)(r-2)^{\overset{\text{تعدد}}{\downarrow}3} = 0$$

چون جمله r - 2 به توان ۳ می‌رسد، ۲ را ریشه تعدد سوم معادله گویند. قضیه زیر، داشتن تعدد را برای ریشه مجاز می‌داند.

◀ قضیه ب ـ ۲

فرض کنید r ریشه تعدد m مربوط به معادله مشخصه برای بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت باشد. آن‌گاه حل‌های بازگشتی عبارت‌اند از:

$$t_n = r^n, \quad t_n = nr^n, \quad t_n = n^2r^n, \quad t_n = n^3r^n, \quad \cdots, \quad t_n = n^{m-1}r^n$$

بنابراین، جمله مربوط به هریک از این حل‌ها در حل عمومی بازگشتی‌ها گنجانده شده است.

• **مثال ب ـ ۱۰** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n - 7t_{n-1} + 15_{n-2} - 9t_{n-3} &= 0 \qquad \text{for } n > 2 \\ t_0 &= 0 \\ t_1 &= 1 \qquad t_2 = 2 \end{aligned}$$

۱. معادله مشخصه را به‌دست آورید:

$$\begin{aligned} t_n - 7t_{n-1} + 15t_{n-2} - 9t_{n-3} &= 0 \\ r^3 - 7r^2 + 15r - 9 &= 0 \end{aligned}$$

۲. معادله مشخصه را حل کنید:

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = (r-1)\underbrace{(r-3)^2}_{\text{تعدد}} = 0$$

ریشه‌های معادله عبارت‌اند از $r = 1$ و $r = 3$ و ریشه $r = 3$ ریشه تعدد ۲ است.

۳. قضیه ب ـ ۲ را اِعمال کنید تا حل کلی بازگشتی را به‌دست آورید:

$$t_n = c_1 1^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$$

جملاتی برای 3^n و $n3^n$ درنظرگرفتیم، زیرا ۳، ریشه تعدد ۲ است.

۴. با اِعمال حل کلی به شرایط اولیه، مقادیر ثابت را به‌دست آورید:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 = c_1 1^0 + c_2 3^0 + c_3 (0)\left(3^0\right) \\ t_1 &= 1 = c_1 1^1 + c_2 3^1 + c_3 (1)\left(3^1\right) \\ t_2 &= 2 = c_1 1^2 + c_2 3^2 + c_3 (2)\left(3^2\right) \end{aligned}$$

این مقادیر به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} c_1 + \ \ c_2 \qquad &= 0 \\ c_1 + 3c_2 + \ \ 3c_3 &= 1 \\ c_1 + 9c_2 + 18c_3 &= 2 \end{aligned}$$

با حل این سیستم داریم $c_1 = -1$ ، $c_2 = 1$ و $c_3 = \frac{1}{3}$.

۵. با جایگزینی ثوابت در حل کلی، حل ویژه به‌دست‌می‌آید:

$$\begin{aligned} t_n &= (-1)(1^n) + (1)(3^n) + \left(-\frac{1}{3}\right)(n3^n) \\ &= -1 + 3^n - n3^{n-1} \end{aligned}$$

• **مثال ب ـ ۱۱** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n - 5t_{n-1} + 7t_{n-2} - 3t_{n-3} &= 0 \qquad \text{for } n > 2 \\ t_0 &= 1 \\ t_1 &= 2 \qquad t_2 = 3 \end{aligned}$$

۱. معادله مشخصه را به‌دست آورید:

$$t_n - 5t_{n-1} + 7t_{n-2} - 3t_{n-3} = 0$$
$$r^3 - 5r^2 + 7r - 3 = 0$$

۲. معادله مشخصه را حل کنید:

$$r^3 - 5r^2 + 7r - 3 = (r-3)\overset{\text{تعدد}}{\overset{\downarrow}{(r-1)^2}} = 0$$

ریشه‌های معادله عبارت‌اند از $r = 3$ و $r = 1$ و ریشه ۱ تعدد ۲ دارد.

۳. قضیه ب ـ ۲ را اِعمال کنید تا حل کلی بازگشتی را به‌دست آورید:

$$t_n = c_1 3^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n$$

۴. با اِعمال حل کلی به مقادیر اولیه، مقادیر ثابت را به‌دست آورید:

$$\begin{aligned} t_0 &= 1 = c_1 3^0 + c_2 1^0 + c_3 (0)\left(1^0\right) \\ t_1 &= 2 = c_1 3^1 + c_2 1^1 + c_3 (1)\left(1^1\right) \\ t_2 &= 3 = c_1 3^2 + c_2 1^2 + c_3 (2)\left(1^2\right) \end{aligned}$$

این معادلات به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \quad &= 1 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 &= 2 \\ 9c_1 + c_2 + 2c_3 &= 3 \end{aligned}$$

با حل این سیستم داریم $c_1 = 0$، $c_2 = 1$ و $c_3 = 1$.

۵. با جایگزینی ثوابت در حل کلی، حل ویژه را به‌دست آورید:

$$\begin{aligned} t_n &= 0\left(3^n\right) + 1\left(1^n\right) + 1\left(n1^n\right) \\ &= 1 + n \end{aligned}$$

ب ـ ۲ ـ ۲ بازگشتی‌های خطی ناهمگن

تعریف بازگشتی زیر را درنظربگیرید:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = f(n)$$

در این بازگشتی که در آن جملات a_i و k ثابت‌اند و $f(n)$ تابعی غیر از صفر است، **معادله بازگشتی خطی ناهمگن با ضرایب ثابت** نام دارد.

منظور از تابع صفر، تابع $f(n) = 0$ است. اگر از تابع صفر استفاده کنیم، یک معادله بازگشتی خطی ناهمگن خواهیم داشت. روش کلی شناخته‌شده‌ای برای حل معادله بازگشتی خطی ناهمگن وجود ندارد. روشی را برای حل حالت خاص ارائه می‌کنیم:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b^n p(n) \qquad \text{(ب ـ ۲)}$$

که در آن b ثابت و p(n) برحسب n چندجمله‌ای است.

• **مثال ب ـ ۱۲** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$t_n - 3t_{n-1} = 4^n$$

این بازگشتی، نمونه‌ای از بازگشتی ب ـ ۲ است که در آن k = 1، b = 4 و p(n) = 1 است.

• **مثال ب ـ ۱۳** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$t_n - 3t_{n-1} = 4^n\,(8n+7)$$

این بازگشتی نمونه‌ای از بازگشتی ب ـ ۲ است که در آن k = 1 ، b = 4 و p(n) = 8n + 7 است.

حالت خاصی که در بازگشتی ب ـ ۲ نشان داده شده است، با تبدیل آن به بازگشتی خطی ناهمگن قابل حل است. مثال بعدی روش انجام این کار را نشان می‌دهد.

• **مثال ب ـ ۱۴** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n - 3t_{n-1} &= 4^n \qquad \text{for } n > 1 \\ t_0 &= 0 \\ t_1 &= 4 \end{aligned}$$

این بازگشتی همگن نیست، زیرا جمله 4^n در سمت راست وجود دارد. به طریق زیر می‌توانیم از آن جمله خلاص شویم:

۱. به‌جای n مقدار n - 1 را در بازگشتی اصلی قرار دهید، به‌طوری‌که بازگشتی با 4^{n-1} در سمت راست بیان شود:

$$t_{n-1} - 3t_{n-2} = 4^{n-1}$$

۲. بازگشتی اصلی را بر ۴ تقسیم کنید به‌طوری‌که بازگشتی به روش دیگری با 4^{n-1} در سمت راست بیان شود:

$$\frac{t_n}{4} - \frac{3t_{n-1}}{4} = 4^{n-1}$$

۳. حل بازگشتی اصلی باید با حل این نسخه‌های جدید یکسان باشد. لذا، باید با تفاضل آن‌ها نیز حل یکسانی داشته باشد. معنایش این‌است‌که با تفریق بازگشتی مرحله ۱ از بازگشتی مرحله ۲ می‌توانیم 4^{n-1} را حذف کنیم. نتیجه به صورت زیر است:

$$\frac{t_n}{4} - \frac{7t_{n-1}}{4} + 3t_{n-2} = 0$$

با ضرب در ۴ می‌توانیم کسرها را از بین ببریم:

$$t_n - 7t_{n-1} + 12t_{n-2} = 0$$

این معادله یک معادله بازگشتی خطی همگن است و می‌تواند با اِعمال قضیه ب ـ ۱ حل شود. یعنی، معادله مشخصه زیر را حل می‌کنیم:

$$r^2 - 7r + 12 = (r-3)(r-4) = 0$$

به‌این ترتیب، حل کلی به‌دست‌می‌آید:

$$t_n = c_1 3^n + c_2 4^n$$

با استفاده از ثوابت اولیه $t_0 = 0$ و $t_1 = 4$ حل ویژه به‌دست‌می‌آید:

$$t_n = 4^{n+1} - 4\left(3^n\right)$$

در مثال ب ـ۱۴، حل کلی دارای جملات زیر است:

$$c_1 3^n \qquad \text{و} \qquad c_2 4^n$$

جمله اول از معادله مشخصه‌ای ناشی می‌شود که اگر بازگشتی همگن بود به دست می‌آمد، ولی جمله دوم از بخش ناهمگن بازگشتی، یعنی b به‌دست‌می‌آید. چندجمله‌ای p(n) در این مثال برابر با یک است. اگر این‌طور نباشد، دستکاری ضروری برای تبدیل بازگشتی به بازگشتی همگن بسیار پیچیده بود. به‌هرحال، نتیجه‌اش این‌است‌که b به‌عنوان تعدد معادله مشخصه‌ی مربوط به بازگشتی خطی همگنِ حاصل محسوب خواهد شد. این نتیجه، در قضیه زیر ارائه خواهد شد. این قضیه بدون اثبات مطرح می‌شود. مراحل اثبات آن مانند مثال ب ـ ۴ است.

◀ قضیه ب ـ ۳

بازگشتی خطی ناهمگن زیر را درنظربگیرید:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b^n p\left(n\right)$$

این شکل از بازگشتی خطی ناهمگن می‌تواند به بازگشتی خطی همگنی تبدیل شود که معادله مشخصه آن به صورت زیر است:

$$\left(a_0 r^k + a_1 r^k + \cdots + a_k\right)\left(r - b\right)^{d+1} = 0.$$

در این معادله مشخصه، d برابر با درجه p(n) است. توجه کنید که معادله مشخصه از دو بخش تشکیل شده است:

۱. معادله مشخصه مربوط به بازگشتی همگنِ متناظر با بازگشتی.

۲. جمله‌ای که از بخش ناهمگن بازگشتی به‌دست‌می‌آید.

اگر بیش از یک جمله مانند $b^n p(n)$ در سمت راست وجود داشته باشد، هر یک از آن‌ها در معادله مشخصه ظاهر می‌شود.

قبل از به کارگیری این قضیه، به یاد دارید که درجه چندجمله‌ای p(n) بالاترین توان n است. به‌عنوان‌مثال، موارد زیر را درنظربگیرید:

چندجمله	درجه
$p\left(n\right) = 3n^2 + 4n - 2$	2
$p\left(n\right) = 5n + 7$	1
$p\left(n\right) = 8$	0

اکنون قضیه ب ـ۳ را به کار می‌گیریم.

• **مثال ب ـ ۱۵** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n - 3t_{n-1} &= 4^n(2n+1) \qquad \text{for } n > 1 \\ t_0 &= 0 \\ t_1 &= 12 \end{aligned}$$

۱. معادله مشخصه متناظر با معادله همگن را به‌دست‌آورید:

$$t_n - 3t_{n-1} = 0$$
$$r^1 - 3 = 0$$

۲. جمله‌ای را از بخش ناهمگن بازگشتی به‌دست‌آورید:

$$\underset{b}{4^n}(\overset{d}{2n^1} + 1)$$

جمله حاصل از بخش ناهمگن برابر است با:

$$(r-b)^{d+1} = (r-4)^{1+1}$$

۳. برای به‌دست‌آوردن معادله مشخصه از جملات حاصل از مراحل ۱ و ۳، قضیه ب ـ ۳ را اِعمال کنید. معادله مشخصه برابر است با:

$$(r-3)(r-4)^2$$

پس از به‌دست‌آوردن معادله مشخصه، همانند معادله ناهمگن ادامه دهید.

۴. معادله مشخصه را حل کنید:

$$(r-3)(r-4)^2 = 0$$

ریشه‌ها عبارت‌اند از $r = 3$ و $r = 4$ و تعدد ریشه $r = 4$ برابر با ۲ است.

۵. قضیه ب ـ ۲ را اِعمال کنید تا حل کلی برای بازگشتی به‌دست‌آورید:

$$t_n = c_1 3^n + c_2 4^n + c_3 n 4^n$$

سه موردِ ناشناخته، ولی فقط دو شرط اولیه داریم. در این حالت، از طریق محاسبه مقدار بازگشتی در مقدار بزرگِ بعدی n، باید شرط اولیه دیگری را بیابیم. در این حالت، آن مقدار برابر با ۲ است. زیرا:

$$t_2 - 3t_1 = 4^2(2 \times 2 + 1)$$

و $t_1 = 12$:

$$t_2 = 3 \times 12 + 80 = 116$$

در تمرین‌ها از شما خواسته می‌شود تا اولاً مقادیر ثابت را به‌دست‌آورید و ثانیاً ثوابت را در حل کلی جایگزین کنید تا به‌دست‌آورید:

$$t_n = 20(3^n) - 20(4^n) + 8n4^n$$

• **مثال ب ـ ۱۶** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$t_n - t_{n-1} = n - 1 \qquad \text{for } n > 0$$
$$t_0 = 0$$

۱. معادله مشخصه متناظر با بازگشتی همگن را به‌دست‌آورید:

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= 0 \\ r^1 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

۲. جمله‌ای را از بخش بازگشتی ناهمگن به‌دست‌آورید:

$$n - 1 = \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{1^n}(\overset{\substack{d \\ \downarrow}}{n^1} - 1)$$

این جمله برابر است با:

$$(r-1)^{1+1}$$

۳. قضیه ب ـ ۳ را اِعمال کنید تا معادله مشخصه را از جملات حاصل از مراحل ۱ و ۳ به‌دست‌آورید. معادله مشخصه برابر است با:

$$(r-1)(r-1)^2$$

۴. معادله مشخصه را حل کنید:

$$(r-1)^3 = 0$$

ریشه $r = 1$ است که تعدد آن ۳ می‌باشد.

۵. قضیه ب ـ ۲ را اِعمال کنید تا حل کلی بازگشتی را به‌دست‌آورید:

$$\begin{aligned} t_n &= c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 n^2 1^n \\ &= c_1 + c_2 n + c_3 n^2 \end{aligned}$$

به دو شرایط اولیه دیگر نیازمندیم:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + 1 - 1 = 0 + 0 = 0 \\ t_2 &= t_1 + 2 - 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

در تمرین‌ها از شما خواسته می‌شود اولاً مقادیر ثوابت را تعیین کنید و ثانیاً ثوابت را در حل کلی جایگزین کنید تا به‌دست‌آورید:

$$t_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

• **مثال ب ـ ۱۷** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n - 2t_{n-1} &= n + 2^n \qquad \text{for } n > 1 \\ t_1 &= 0 \end{aligned}$$

۱. معادله مشخصه متناظر با بازگشتی همگن را به‌دست‌آورید:

$$\begin{aligned} t_n - 2t_{n-1} &= 0 \\ r^1 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

۲. در این حالت دو جمله در سمت راست قرار دارد. همان‌طور که از قضیه ب ـ ۳ نتیجه می‌شود، هر جمله به صورت زیر در معادله مشخصه ظاهر می‌گردد:

$$\underset{b}{\underset{\uparrow}{n = (1^n)n^1}} \qquad \underset{b}{\underset{\uparrow}{2n = (2^n)n^0}}$$

این دو جمله عبارت‌اند از:

$$(r-1)^{1+1} \quad \text{و} \quad (r-2)^{0+1}$$

۳. قضیه ب ـ ۳ را اِعمال کنید تا معادله مشخصه را از تمام جملات به‌دست آورید:

$$(r-2)(r-1)^2(r-2) = (r-2)^2(r-1)^2$$

در تمرین‌ها از شما خواسته می‌شود این مسئله را کامل کنید.

ب ـ ۲ ـ ۳ تغییر متغیرها (تبدیلات دامنه)

گاهی بازگشتی‌ای که نتواند با قضیه ب ـ ۳ حل شود، می‌تواند با متغیرها و تبدیل به یک شکل مناسب، حل گردد. این روش در مثال‌های زیر تشریح می‌شود. در این مثال‌ها، بازگشتی اصلی را با $T(n)$ نشان می‌دهیم، زیرا t_k برای نمایش بازگشتی جدید به کار می‌رود. معنای نماد $T(n)$ مثل t_n است، یعنی برای هر مقدار n، یک عدد یکتا درنظرگرفته می‌شود.

• **مثال ب ـ ۱۸** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 \qquad \text{به ازای } n > 1\text{، n توانی از ۲ است}$$
$$T(1) = 1$$

به یاد داشته باشید که قبلاً این بازگشتی را در بخش ب ـ ۱ با استقرا حل کردیم. آن را دوباره به روش تغییر متغیرها حل می‌کنیم. این بازگشتی طوری نیست که با اِعمال قضیه ب ـ ۳ حل شود، زیرا جمله $n / 2$ در آن وجود دارد. می‌توانیم آن را به شکلی تبدیل کنیم که این قضیه قابل استفاده باشد. ابتدا قرار می‌دهیم:

$$n = 2^k \quad \text{که نتیجه می‌شود} \quad k = \lg n$$

ثانیاً 2^k را به‌جای n در بازگشتی قرار می‌دهیم تا به‌دست آوریم:

$$T(2^k) = T\left(\frac{2^k}{2}\right) + 1 \qquad \text{(ب ـ ۳)}$$
$$= T(2^{k-1}) + 1$$

سپس در بازگشتی ب ـ ۳ قرار می‌دهیم:

$$t_k = T(2^k)$$

به‌این ترتیب، بازگشتی جدید را به‌دست‌می‌آوریم:

$$t_k = t_{k-1} + 1$$

این بازگشتی با اِعمال قضیه ب ـ ۳ قابل حل است. لذا، با اعمال این قضیه حل کلی آن به‌دست‌می‌آید:

$$t_k = c_1 + c_2 k$$

حل کلی بازگشتی اصلی را در دو مرحله زیر می‌توان به‌دست‌آورد:

۱. $T(2^k)$ را به‌جای t_k در حل کلی قرار دهید تا بازگشتی جدید به‌دست‌آید:

$$T\left(2^k\right) = c_1 + c_2 k$$

۲. در معادله‌ای که در مرحله ۱ به‌دست‌آمد، n را به‌جای n^k قرار دهید:

$$T(n) = c_1 + c_2 \lg n$$

وقتی حل کلی بازگشتی اصلی را به‌دست‌آوردیم، به‌طور عادی ادامه می‌دهیم. یعنی، با استفاده از شرط اولیه $T(1) = 1$، شرط اولیه دوم را به‌دست می‌آوریم و سپس مقادیر ثابت را محاسبه می‌کنیم تا به‌دست آوریم:

$$T(n) = 1 + \lg n$$

• **مثال ب ـ ۱۹** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n - 1$ به‌ازای $n > 1$، n توانی از ۲ است
$T(1) = 0$

به یاد داشته باشید که در مثال ب ـ ۳ نتوانستیم این بازگشتی را با استفاده از استقرا حل کنیم. آن را با تغییر متغیر حل خواهیم کرد. ابتدا، 2^k را به‌جای n قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} T\left(2^k\right) &= 2T\left(\frac{2^k}{2}\right) + 2^k - 1 \\ &= 2T\left(2^{k-1}\right) + 2^k - 1 \end{aligned}$$

سپس در این معادله قرار می‌دهیم:

$$t_k = T\left(2^k\right)$$

تا بازگشتی زیر را به‌دست‌آوریم:

$$t_k = 2t_{k-1} + 2^k - 1$$

قضیه ب ـ ۳ را اِعمال می‌کنیم تا به‌دست آوریم:

$$t_k = c_1 + c_2 2^k + c_3 k 2^k$$

مراحلی را دنبال می‌کنیم تا حل کلی بازگشتی به‌دست‌آید.

۱. در حل کلی $T(2^k)$ را به‌جای t_k قرار دهید تا بازگشتی جدید به‌دست‌آید:

$$T\left(2^k\right) = c_1 + c_2 2^k + c_3 k 2^k$$

۲. در معادله حاصل از مرحله ۱، مقدار n را به‌جای 2^k و مقدار lg n را به‌جای k قرار دهید تا به‌دست‌آوریم:

$$T(n) = c_1 + c_2 n + c_3 n \lg n$$

اکنون مثل حالت عادی ادامه می‌دهیم. یعنی با استفاده از شرط اولیه $T(1) = 0$، دو شرط اولیه دیگر را به‌دست می‌آوریم و سپس مقادیر ثابت را محاسبه می‌کنیم. حل زیر به‌دست می‌آید:

$$T(n) = n \lg n - (n-1)$$

• **مثال ب ـ ۲۰** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + 18(\frac{n}{2})^2$ به‌ازای $n > 1$، n توانی از ۲ است
$T(1) = 0$

در بازگشتی، 2^k را به‌جای n قرار دهید:

$$T(2^k) = 7T(2^{k-1}) + 18(2^{k-1})^2 \qquad \text{(ب ـ ۴)}$$

در بازگشتی ب ـ ۴ قرار دهید $t_k = T(2^k)$ تا به‌دست‌آورید:

$$t_k = 7t_{k-1} + 18(2^{k-1})^2$$

این بازگشتی دقیقاً چیزی نیست که بتوان قضیه ب ـ ۳ را اِعمال کرد، ولی می‌توانیم آن را به صورت زیر درآوریم:

$$\begin{aligned} t_k &= 7t_{k-1} + 18(2^{k-1})^2 \\ &= 7t_{k-1} + 18(4^{k-1}) \\ &= 7_{k-1} + 4^k\left(\frac{18}{4}\right) \end{aligned}$$

اکنون قضیه ب ـ ۳ را در این بازگشتی جدید اِعمال می‌کنیم تا به‌دست آوریم:

$$t_k = c_1 7^k + c_2 4^k$$

مراحلی را دنبال کنید تا یک حل کلی از بازگشتی اصلی به‌دست آورید.

۱. در حل کلی، $T(2^k)$ را به‌جای t_k قرار دهید:

$$T(2^k) = c_1 7^k + c_2 4^k$$

۲. در معادله حاصل از مرحله ۱، مقدار n را به‌جای 2^k و مقدار lg n را به‌جای k قرار دهید:

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 7^{\lg n} + c_2 4^{\lg n} \\ &= c_1 n^{\lg 7} + c_2 n^2 \end{aligned}$$

با استفاده از شرط اولیه $T(1) = 0$، شرط اولیه دوم را به‌دست‌آورید و سپس مقادیر ثابت را محاسبه کنید. حل به صورت زیر است:

$$T(n) = 6n^{\lg 7} - 6n^2 \approx 6n^{2.81} - 6n^2$$

ب ـ ۳ حل بازگشتی با جایگزینی

گاهی بازگشتی را می‌توان با **جایگزینی** حل کرد. اگر با استفاده از روش‌های مطرح‌شده در بخش‌های قبلی نتوانستید بازگشتی را حل کنید، از روش **جایگزینی** استفاده کنید. مثال‌های زیر این روش را تشریح می‌کنند.

• **مثال ب ـ ۲۱** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &t_n = t_{n-1} + n \qquad \text{for } n > 1 \\ &t_1 = 1 \end{aligned}$$

در واقع، جایگزینی برعکس استقرا است. یعنی از n شروع کرده عقبگرد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + n \\ t_{n-1} &= t_{n-2} + n - 1 \\ t_{n-2} &= t_{n-3} + n - 2 \\ &\vdots \\ t_2 &= t_1 + 2 \\ t_1 &= 1 \end{aligned}$$

سپس هر معادله را به صورت زیر در معادله قبلی جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + n \\ &= t_{n-2} + n - 1 + n \\ &= t_{n-3} + n - 2 + n - 1 + n \\ &\vdots \\ &= t_1 + 2 + \cdots + n - 2 + n - 1 + n \\ &= 1 + 2 + \cdots + n - 2 + n - 1 + n \\ &= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

معادله آخری، همان نتیجه مثال الف ـ ۱ در پیوست ۱ است.

بازگشتی مثال ب ـ ۲۱ می‌تواند با معادله مشخصه حل شود. بازگشتی مثال زیر از این طریق قابل حل نیست.

• **مثال ب ـ ۲۲** بازگشتی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &t_n = t_{n-1} + \frac{2}{n} \qquad n > 1 \\ &t_1 = 0 \end{aligned}$$

ابتدا از n عقبگرد می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
t_n &= t_{n-1} + \frac{2}{n} \\
t_{n-1} &= t_{n-2} + \frac{2}{n-1} \\
t_{n-2} &= t_{n-3} + \frac{2}{n-2} \\
&\vdots \\
t_2 &= t_1 + \frac{2}{2} \\
t_1 &= 0
\end{aligned}$$

سپس هر معادله را در معادله قبلی جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
t_n &= t_{n-1} + \frac{2}{n} \\
&= t_{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\
&= t_{n-3} + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\
&\vdots \\
&= t_1 + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\
&= 0 + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\
&= 2\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \approx 2 \ln n
\end{aligned}$$

معادله تقریبی از مثال الف ـ ۹ پیوست ۱ به‌دست‌می‌آید.

ب ـ ٤ تعمیم نتایج n، توانی از ثابت مثبت b، به n در حالت کلی

در ادامه فرض شد که با مطالب فصل اول آشنایی دارید. در مورد بعضی از الگوریتم‌های بازگشتی، پیچیدگی زمانی دقیق را وقتی محاسبه می‌کنیم که n توانی از پایه‌ای مثل b باشد که در آن، b یک ثابت مثبت است. معمولاً b برابر با ۲ است. این حالت، به خصوص برای الگوریتم‌های تقسیم و حل درست است (فصل ۲). از نظر شهودی، به‌نظر می‌رسد نتیجه‌ای که برای n به توان b به‌دست‌می‌آید، برای n در حالت کلی درست است. به‌عنوان‌مثال، اگر در الگوریتمی برای توان ۲ از n داشته باشیم:

$$T(n) = 2n \lg n$$

به‌نظرمی‌رسد که برای n در حالت کلی داشته باشیم:

$$T(n) \in \Theta(n \lg n)$$

معمولاً چنین نتایجی را می‌توانیم به‌دست آوریم. در ادامه، وضعیتی را بحث می‌کنیم که این حالت برقرار است. ابتدا نیاز به چند تعریف داریم. این تعاریف به توابع دلخواهی اعمال می‌شوند که دامنه و برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، ولی آن‌ها را برای توابع پیچیدگی به کار می‌بریم که برای ما جالب‌اند.

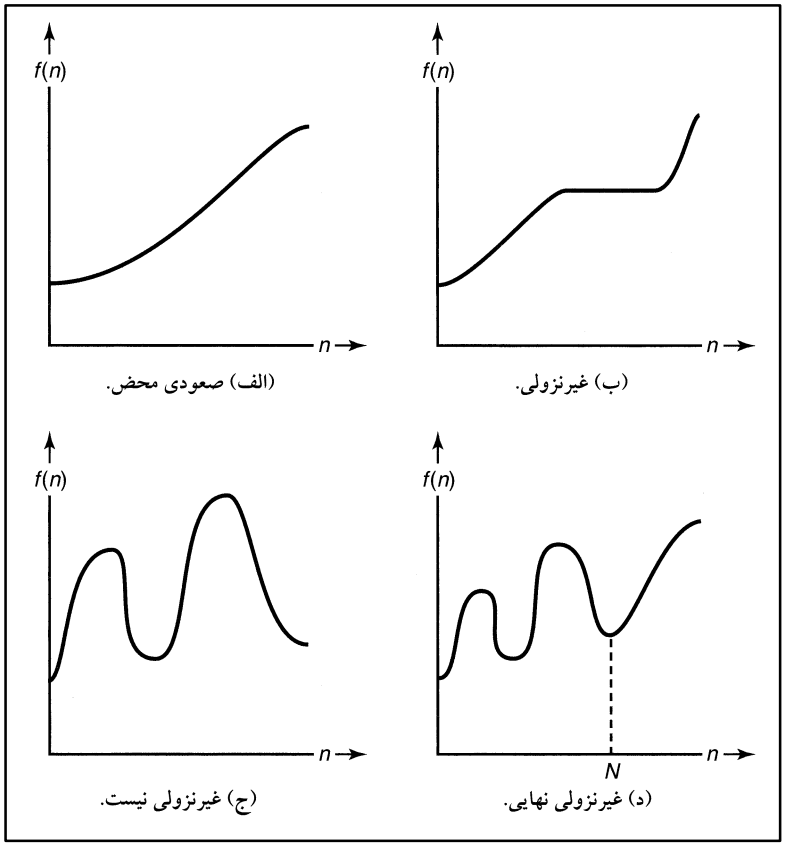
تعریف تابع پیچیدگی $f(n)$ **صعودی محض** نامیده می‌شود اگر $f(n)$ همواره با افزایش n بزرگ‌تر شود. یعنی اگر $n_1 > n_2$ داریم:

$$f(n_1) > f(n_2)$$

تابع شکل ب ـ ۱ (الف) صعودی محض است (برای سهولت، دامنه‌های توابع شکل ب ـ ۱ اعداد حقیقی غیرمنفی درنظرگرفته شدند). بسیاری از توابعی که در تحلیل الگوریتم‌ها خواهیم داشت، برای مقادیر غیرمنفی n صعودی محض خواهند بود. به‌عنوان مثال، $\lg n$، n، $n \lg n$، n^2 و 2^n، تا زمانی که n غیرمنفی است، صعودی محض هستند.

تعریف تابع پیچیدگی $f(n)$ **غیرنزولی** است اگر $f(n)$ با افزایش n کوچک‌تر شود. یعنی اگر $n_1 > n_2$ آن‌گاه:

$$f(n_1) \geq f(n_2)$$



(الف) صعودی محض.

(ب) غیرنزولی.

(ج) غیرنزولی نیست.

(د) غیرنزولی نهایی.

شکل ب ـ ۱ چهار تابع.

هر تابع صعودی محض، غیرنزولی است، اما تابعی که بتواند هموار باشد، بدون این‌که صعودی محض باشد، غیرنزولی است. تابع شکل ب ـ ۱(ب) نمونه‌ای از این تابع است. تابع شکل ب ـ ۱(ج) غیرنزولی نیست.

پیچیدگی‌های زمانی (یا حافظه) اغلب الگوریتم‌ها معمولاً غیرنزولی‌اند، زیرا زمان لازم برای پردازش ورودی با افزایش ورودی، کاهش نمی‌یابد. با نگاهی به شکل ب ـ ۱ به‌نظر می‌رسد که باید قادر باشیم تحلیل n به توان b را به n کلی بسط دهیم (تا زمانی که تابع غیرنزولی است). به عنوان مثال، فرض کنید مقادیر f(n) را برای n به توان ۲ محاسبه کردیم. در مورد تابع شکل ب ـ ۱(ج)، هر چیزی ممکن است بین $2^3 = 8$ و $2^4 = 16$ باشد. لذا با توجه به مقادیر 8 و 16 نمی‌توان در مورد رفتار تابع بین 8 و 16 نتیجه‌ای را به‌دست آورد. اما، در مورد تابع غیرنزولی f(n)، اگر $8 \le n \le 16$، داریم:

$$f(8) \le f(n) \le f(16)$$

لذا، به‌نظر می‌رسد که بتوانیم مرتبه f(n) را از مقادیر f(n) برای n به توان ۲ به‌دست آوریم. آن‌چه که به‌نظر می‌رسد از نظر شهودی باید درست باشد، می‌تواند برای دسته وسیعی از توابع ثابت شود. قبل از ارائه قضیه‌ای در این مورد، به یاد بیاورید که مرتبه در مورد رفتارهایی با برد طولانی مطرح است. چون مقادیر اولیه تابع اهمیت ندارند، در قضیه لازم است که تابع سرانجام غیرنزولی باشد (تابع غیرنزولی نهایی).

تعریف تابع پیچیدگی f(n)، **غیرنزولی نهایی** نامیده می‌شود اگر برای تمامی مقادیر n پس از نقاط مشخص، با افزایش مقدار n، تابع هرگز کاهش نیابد. یعنی، یک N وجود دارد که اگر $n_1 > n_2 > N$ باشد، داریم:

$$f(n_1) \ge f(n_2)$$

هر تابع غیرنزولی، غیرنزولی نهایی است. تابع شکل ب ـ ۱(د) نمونه‌ای از تابع غیرنزولی نهایی است که غیرنزولی نیست. قبل از ارائه قضیه تعمیم نتایج n به توان b، به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف تابع پیچیدگی f(n)، **هموار** نامیده می‌شود اگر f(n) غیرنزولی نهایی باشد و اگر:

$$f(2n) \in \Theta(f(n))$$

• **مثال ب ـ ۲۳** توابع lg n، n، n lg n و n^k که در آن‌ها $k \ge 0$ است، هموار هستند. این موضوع را برای lg n نشان می‌دهیم. در تمرین‌ها از شما خواسته می‌شود برای توابع دیگر این کار را انجام دهید. قبلاً گفتیم که lg n غیرنزولی نهایی است. بر اساس شرط دوم داریم:

$$\lg(2n) = \lg 2 + \lg n \in \Theta(\lg n)$$

• **مثال ب ـ ۲۴** تابع 2^n هموار نیست، زیرا از خواص مرتبه در بخش ۱-۴-۲ فصل اول نتیجه می‌شود که:

$$2^n \in o(4^n)$$

بنابراین داریم:

$$2^{2n} = 4^n \text{ is not in } \Theta(2^n)$$

◀ قضیه ب ـ ٤

فرض کنید $b \geq 2$ یک مقدار صحیح، تابع $f(n)$ یک تابع پیچیدگی هموار، و $T(n)$ تابع پیچیدگی غیرنزولی باشد. اگر داشته باشیم:

$$T(n) \in \Theta(f(n)) \qquad \text{برای } n \text{ به توان } b$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

علاوه‌براین، اگر به‌جای θ از O یا o استفاده شود، همین استلزام‌ها به‌دست می‌آیند.

• مثال ب ـ ۲۵ فرض کنید برای توابع پیچیدگی داریم:

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 \qquad \text{for } n > 1$$
$$T(1) = 1$$

که در آن n توانی از ۲ است و بازگشتی مثال ب ـ ۸ در دست است. بر اساس آن مثال، داریم:

$$T(n) = \lg n + 1 \in \Theta(\lg n)$$

چون $\lg n$ هموار است، باید نشان دهیم که $T(n)$ یک تابع غیرنزولی نهایی است. قضیه ب ـ ۴ را اِعمال کرده نتیجه زیر را به‌دست آوردیم:

$$T(n) \in \Theta(\lg n)$$

با توجه به این‌که $\lg n + 1$ غیرنزولی نهایی است، ممکن‌است بتوان نتیجه گرفت که $T(n)$ غیرنزولی نهایی است. اما نمی‌توانیم این کار را انجام دهیم، زیرا فقط می‌دانیم که وقتی n توانی از ۲ باشد، داریم $T(n) = \lg n + 1$ است. فقط با توجه به این حقیقت، $T(n)$ می‌تواند هر رفتار ممکن بین توان‌های ۲ را نشان دهد.

با استفاده از استقرا و برای تمام مقادیر $n \geq 2$ که در آن $1 \leq k < n$ است، نشان می‌دهیم که $T(n)$ غیرنزولی است:

$$T(k) \leq T(n)$$

پایه‌ی استقرا: برای $n = 2$ داریم:

$$T(1) = 1$$
$$T(2) = T\left(\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor\right) + 1 = T(1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

بنابراین داریم:

$$T(1) \leq T(2)$$

فرض استقرا: یک روش ارائه فرض استقرا این‌است‌که فرض شود این حکم برای تمام $m \leq n$ درست است. سپس، طبق معمول، نشان می‌دهیم که برای $n + 1$ درست است. فرض کنید n یک عدد صحیح دلخواه بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد. فرض کنید برای تمام $m \leq n$، اگر $k < m$ داریم:

$$T(k) \leq T(m)$$

گام استقرا: چون در فرض استقرا، فرض کردیم برای $k < n$ داریم:

$$T(k) \le T(n)$$

باید نشان دهیم که:

$$T(n) \le T(n+1)$$

اگر $n \ge 1$ باشد، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \le n$$

لذا، با توجه به فرض استقرا داریم:

$$T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \le T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right)$$

با استفاده از بازگشتی، داریم:

$$T(n) = \boldsymbol{T}\left(\left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} \right\rfloor\right) + 1 \le \boldsymbol{T}\left(\left\lfloor \frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{2}} \right\rfloor\right) + 1 = T(n+1)$$

سرانجام، یک روش کلی را برای تعیین مرتبه چندبازگشتی ارائه می‌کنیم.

◀ **قضیه ب ـ ۵**

فرض کنید تابع پیچیدگی T(n) سرانجام غیرنزولی است و موارد زیر را برآورده می‌کند:

برای $n > 1$، n توانی از b

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k$$
$$T(1) = d$$

که در آن $b \ge 2$ و $k \ge 0$ مقادیر صحیح و a، c و d ثوابتی‌اند که $a > 0$، $c > 0$ و $d \ge 0$ است. آن‌گاه داریم:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta\left(n^k\right) & \text{if } a < b^k \\ \Theta\left(n^k \lg n\right) & \text{if } a = b^k \\ \Theta\left(n^{\log_b a}\right) & \text{if } a > b^k \end{cases} \qquad \text{(ب ـ ۵)}$$

علاوه‌براین، اگر در حکم بازگشتی، مقدار زیر:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k$$

با مقادیر زیر جایگزین شود:

$$T(n) \le aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k \qquad \text{یا} \qquad T(n) \ge aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k$$

آن‌گاه نتیجه **ب ـ ۵** با جایگزینی O و Ω با θ به‌دست می‌آید.

با حل بازگشتی کلی با استفاده از معادله مشخصه و سپس اِعمال قضیه ب ـ ۴ می‌توانیم این قضیه را ثابت کنیم. نمونه‌هایی از کاربرد قضیه ب ـ ۵ در ادامه آمده است.

• **مثال ب ـ ۲۶** فرض کنید T(n) تابع نزولی نهایی باشد و موارد زیر را برآورده می‌کند:

$$T(n) = \overset{a}{\underset{\downarrow}{8}}\, T(n/\overset{b}{\underset{\downarrow}{4}}) + 5n^{\overset{k}{\underset{\downarrow}{2}}} \qquad \text{برای } n > 1 \text{، n توانی از } 4$$
$$T(1) = 3$$

با توجه به قضیه ب ـ ۵ و $8 < 4^2$ داریم:

$$T(n) \in \Theta\left(n^2\right)$$

• **مثال ب ـ ۲۷** فرض کنید T(n) تابع غیرنزولی نهایی باشد و موارد زیر را برآورده می‌کند:

$$T(n) = \overset{a}{\underset{\downarrow}{9}}\, T(n/\overset{b}{\underset{\downarrow}{3}}) + 5n^{\overset{k}{\underset{\downarrow}{1}}} \qquad \text{برای } n > 1 \text{، n توانی از } 3$$
$$T(1) = 7$$

با توجه به قضیه ب ـ ۵ و $9 > 3^1$ داریم:

$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_3 9}\right) = \Theta\left(n^2\right)$$

قضیه ب ـ ۵ بیان شد تا قضیه مهمی را هرچه ساده‌تر معرفی کند. درواقع، حالت خاصی از قضیه زیر است که در آن، ثابت s برابر با یک است.

◀ **قضیه ب ـ ۶**

فرض کنید T(n) تابع غیرنزولی نهایی است و موارد زیر را برآورده می‌کند:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k \qquad \text{برای } n > 1 \text{، n توانی از } b$$
$$T(s) = d$$

که در آن s ثابتی به توان b است، $b \geq 2$ و $k \geq 0$ ثوابت صحیح‌اند و a، c و d ثوابتی‌اند که $a > 0$، $c > 0$ و $d \geq 0$ است. در این صورت، نتیجه قضیه ب ـ ۵ برقرار است.

• **مثال ب ـ ۲۸** فرض کنید T(n) تابع غیرنزولی نهایی باشد و موارد زیر را برآورده می‌کند:

$$T(n) = \overset{a}{\underset{\downarrow}{8}}\, T(n/\overset{b}{\underset{\downarrow}{2}}) + 5n^{\overset{k}{\underset{\downarrow}{3}}} \qquad \text{برای } n > 64 \text{، n توانی از } 2$$
$$T(64) = 200$$

با توجه به قضیه ب ـ ۶ و $8 = 2^3$ داریم:

$$T(n) \in \Theta\left(n^3 \lg n\right)$$

ب ـ ۵ اثبات قضایا

لم زیر برای اثبات قضیه ب ـ ۱ لازم است.

▲ **لم ب ـ ۱** فرض کنید بازگشتی خطی همگن زیر موجود است:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

اگر r_1 ریشه معادله مشخصه باشد:

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

آن‌گاه $t_n = r_1^n$ حل بازگشتی است.

اثبات: اگر برای $i = n-k, \ldots, n$ به‌جای t_i مقدار r_1^i را در بازگشتی قرار دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} a_0 r_1^n + a_1 r_1^{n-1} + \cdots + a_k r_1^{n-k} &= r_1^{n-k}(a_0 r_1^k + a_1 r_1^{k-1} + \cdots + a_k) \\ &= r_1^{n-k}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

↑ **چون r_1 ریشه معادله مشخصه است.**

بنابراین، r_1^n حلی برای بازگشتی است.

اثبات قضیه ب ـ ۱: به راحتی می‌توان مشاهده کرد که برای یک بازگشتی همگن خطی، ضرب یک ثابت در هر راه‌حل و مجموع هر دو راه‌حل، راه‌حل‌هایی برای بازگشتی‌اند. با اِعمال لم ب ـ ۱ نتیجه می‌گیریم که اگر $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ریشه‌های متمایز معادله مشخصه باشند، آن‌گاه داریم:

$$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \cdots + c_k r_k^n$$

که در آن، جملات c_i ثوابت دلخواهی بوده حلی برای بازگشتی است. گرچه در این‌جا بحث نخواهیم کرد، ولی می‌توان اثبات کرد این‌ها، تنها حل ممکن هستند.

اثبات قضیه ب ـ ۲: حالتی را ثابت کردیم که در آن، تعدد m برابر با ۲ است. حالت مربوط به m بزرگ، تعمیم ساده‌ای است. فرض کنید r_1 ریشه تعدد ۲ باشد. قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} p(r) &= a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k \qquad \textbf{(معادله مشخصه)} \\ q(r) &= r^{n-k} p(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_k r^{n-k} \\ u(r) &= r q'(r) = a_0 n r^n + a_1 (n-1) r^{n-1} + \cdots + a_k (n-k) r^{n-k} \end{aligned}$$

که در آن $q'(r)$ اولین اشتقاق است. اگر به‌جای t_i مقدار ir_1^i را در بازگشتی قرار دهیم، $u(r_1)$ را به‌دست‌می‌آوریم. لذا، اگر بتوانیم نشان دهیم که $u(r_1) = 0$، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $t_n = ur_1^n$ یک حل بازگشتی است و به نتیجه رسیدیم. درنهایت، داریم:

$$\begin{aligned} u(r) &= r q'(r) \\ &= r\left[\left(r^{n-k}\right) p(r)\right]' \\ &= r\left[r^{n-k} p'(r) + p(r)(n-k) r^{n-k-1}\right] \end{aligned}$$

لذا، برای این‌که نشان دهیم $u(r_1) = 0$ است، باید نشان دهیم که $p(r_1)$ و $p'(r_1)$ هر دو صفر هستند. چون r_1 حل تعدد ۲ مربوط به معادله مشخصه $p(r)$ است، یک $v(r)$ وجود دارد که:

$$p(r) = (r - r_1)^2 v(r)$$

بنابراین داریم:

$$p'(r) = (r - r_1)^2 v'(r) + 2v(r)(r - r_1)$$

و قضیه $p(r_1)$ و $p'(r_1)$ هر دو صفر هستند. در نتیجه، قضیه ثابت است.

اثبات قضیه ب ـ ۴: اثبات را برای O به‌دست می‌آوریم. اثبات‌های مربوط به Ω و θ به همین روش انجام می‌شوند. چون برای تمام nهایی به توان b داریم $T(n) \in O(f(n))$، یک c_1 ثابت و عدد صحیح غیرمنفی N_1 وجود دارد، به‌طوری‌که برای $n > N_1$ و n توانی از b داریم:

$$T(n) \le c_1 \times f(n) \qquad \text{(ب ـ ۶)}$$

برای هر عدد صحیح مثبت n، یک k وجود دارد که:

$$b^k \le n < b^{k+1} \qquad \text{(ب ـ ۷)}$$

می‌توان نشان داد که در مورد تابع هموار، اگر $b \ge 2$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$f(bn) \in \Theta(f(n))$$

یعنی، اگر این شرط برای ۲ درست باشد، برای هر $b > 2$ نیز درست است. لذا، یک ثابت مثبت c_2 و عدد صحیح غیرمنفی N_2 وجود دارد که برای $n > N_2$ داریم:

$$f(bn) \le c_2 f(n)$$

لذا، اگر $b^k \ge N_2$ باشد، داریم:

$$f\left(b^{k+1}\right) = f\left(b \times b^k\right) \le c_2 f\left(b^k\right) \qquad \text{(ب ـ ۸)}$$

چون $T(n)$ و $f(n)$ غیرنزولی نهایی‌اند، یک N_3 وجود دارد که، برای $m > n > N_3$ داریم:

$$T(n) \le T(m) \qquad \text{و} \qquad f(n) \le f(m) \qquad \text{(ب ـ ۹)}$$

فرض کنید r به حدی بزرگ باشد که:

$$b^r > \max(N_1, N_2, N_3)$$

اگر $n > b^r$ و k مقدار متناظر با n در نامساوی ب ـ ۷ باشد، آن‌گاه داریم:

$$b^k \ge b^r$$

لذا، با توجه به نامعادله‌های ب ـ ۶، ب ـ ۷، ب ـ ۸ و ب ـ ۹، برای $n > b_r$ داریم:

$$T(n) \le T\left(b^{k+1}\right) \le c_1 f\left(b^{k+1}\right) \le c_1 c_2 f\left(b^k\right) \le c_1 c_2 f(n)$$

معنایش این است که:

$$T(n) \in O(f(n))$$

تمرین‌ها

بخش ۱ـب

۱. با استفاده از استقرا، حل کاندیدای هر یک از معادلات بازگشتی زیر را بررسی کنید:

(الف) $t_n = 4t_{n-1} \quad \text{for } n > 1$
$t_1 = 3$
حل کاندید: $t_n = 3(4^{n-1})$

(ب) $t_n = t_{n-1} + 5 \quad \text{for } n > 1$
$t_1 = 2$
حل کاندید: $t_n = 5n - 3$

(ج) $t_n = t_{n-1} + n \quad \text{for } n > 1$
$t_1 = 1$
حل کاندید: $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(د) $t_n = t_{n-1} + n^2 \quad \text{for } n > 1$
$t_1 = 1$
حل کاندید: $t_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ه) $t_n = t_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{for } n > 1$
$t_1 = \frac{1}{2}$
حل کاندید: $t_n = \frac{n}{(n+1)}$

(و) $t_n = 3t_{n-1} + 2^n \quad \text{for } n > 1$
$t_1 = 1$
حل کاندید: $t_n = 5(3^{n-1}) - 2^{n+1}$

(ز) $t_n = 3t_{n/2} + n \quad \text{for } n > 1, n \text{ a power of } 2$
$t_1 = \frac{1}{2}$
حل کاندید: $t_n = \frac{5}{2} n^{\lg 3} - 2^n$

(ح) $t_n = nt_{n-1} \quad \text{for } n > 0$
$t_0 = 1$
حل کاندید: $t_n = n!$

۲. یک معادله بازگشتی برای جمله nاُم دنباله ... ,54 ,18 ,6 ,2 بنویسید و با استفاده از استقرا حل کاندید $s_n = 2(3^{n-1})$ را بررسی کنید.

۳. تعداد جابه‌جایی‌ها (m_n برای n حلقه) که در برج‌های هانوی لازم است با بازگشتی زیر مشخص شده است:

$$m_n = 2m_{n-1} + 1 \qquad \text{for } n > 1$$
$$m_n = 1$$

با استفاده از استقرا نشان دهید که حل این معادله بازگشتی برابر با $m_n = 2^n - 1$ است.

۴. الگوریتم زیر، موقعیت بزرگ‌ترین عنصر موجود در آرایه S را برمی‌گرداند. یک معادله بازگشتی برای تعداد مقایسه‌های لازم برای یافتن بزرگ‌ترین عنصر بیابید (t_n). با استفاده از استقرا نشان دهید که $t_n = n - 1$ حل این معادله است:

```
index max_position(index low, index high)
{
  index position;

  if (low == high)
     return low;
  else{
     position = max_position(low + 1, high);
     if (S[low] > S[position])
        position = low;
     return position;
  }
}
```

فراخوانی سطح بالا به صورت زیر است:

```
max_position(1,n)
```

۵. یونان قدیم، به نتایج حاصل از دنباله شکل‌های هندسی علاقه‌مند بودند، مثل اعداد مثلثی زیر:

```
                o
        o      oo
o,  oo,  ooo,  ...
```

$$\rightarrow (1, 3, 6, \ldots)$$

یک معادله بازگشتی برای جمله nاُم در این دنباله بنویسید، راه‌حلی را حدس بزنید و راه‌حل خود را با استقرا بررسی کنید.

۶. n خط، صفحه‌ای را به چند ناحیه تقسیم می‌کند به‌طوری‌که هر جفت از خط‌ها متقاطع باشند، ولی بیش از ۲ خط در یک نقطه مشترک همدیگر را قطع نکنند؟ یک معادله بازگشتی برای تعداد ناحیه‌ها برای n خط بنویسید، حلی را حدس بزنید و آن را با استقرا بررسی کنید.

۷. نشان دهید $B(n,k) = \binom{n+k}{n}$ حلی برای معادله بازگشتی زیر است:

$$B(n,k) = B(n-1,k) + B(n,k-1) \qquad \text{for } n > 0, k > 0$$
$$B(n,0) = 1$$
$$B(0,k) = 1$$

۸. الگوریتمی بنویسید و پیاده‌سازی کنید که مقدار بازگشتی زیر را محاسبه می‌کند و آن را با استفاده از چند نمونه از مسئله اجرا کنید. با استفاده از نتایج به‌دست‌آمده، حلی را برای این بازگشتی حدس بزنید و با استفاده از استقرا آن حل را بررسی کنید:

$$t_n = t_{n-1} + 2n - 1 \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_1 = 1$$

بخش ۲ـب

۹. نشان دهید کدام معادلات بازگشتی در مسئله‌های بخش ب ـ ۱ در گروه‌های زیر قرار می‌گیرند:

(الف) معادلات خطی

(ب) معادلات همگن

(ج) معادلاتی با ضرایب ثابت

۱۰. معادلات مشخصه مربوط به تمام معادلات بازگشتی بخش ب ـ ۱ را پیدا کنید که خطی با ضرایب ثابت‌اند.

۱۱. نشان دهید که اگر f(n) و g(n) حل‌هایی برای معادله بازگشتی همگن خطی با ضرایب ثابت باشند، $c \times f(n) + d \times g(n)$ نیز حل آن معادله است که در آن c و d ثابت‌اند.

۱۲. معادلات بازگشتی زیر را با استفاده از معادله مشخصه حل کنید:

(الف)
$$t_n = 4t_{n-1} - 3t_{n-2} \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$

(ب)
$$t_n = 3t_{n-1} - 2t_{n-2} + n^2 \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$

(ج)
$$t_n = 5t_{n-1} - 6t_{n-2} + 5^n \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$

(د)
$$t_n = 5t_{n-1} - 6t_{n-2} + n^2 - 5n + 7^n \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$

۱۳. حل معادله بازگشتی مثال ب ـ ۱۵ را کامل کنید.

۱۴. حل معادله بازگشتی مثال ب ـ ۱۶ را کامل کنید.

۱۵. معادلات بازگشتی زیر را با استفاده از معادله مشخصه حل کنید:

(الف)
$$t_n = 6t_{n-1} - 9t_{n-2} \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$

(ب)
$$t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} \qquad \text{for } n > 2$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$
$$t_2 = 1$$

(ج)
$$t_n = 2t_{n-1} - t_{n-2} + n^2 + 5^n \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$

(د) $$t_n = 6t_{n-1} - 9t_{n-2} + \left(n^2 - 5n\right) 7^n \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$

۱۶. حل معادله بازگشتی مثال ب ـ ۱۷ را کامل کنید.

۱۷. معادله بازگشتی زیر را درنظربگیرید:

$$t_n = (n-1)\, t_{n-1} + (n-1)\, t_{n-2} \qquad \text{for } n > 2$$
$$t_1 = 0$$
$$t_2 = 1$$

نشان دهید که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$t_n = nt_{n-1} + (-1)^n \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_1 = 0$$

۱۸. معادله بازگشتی تمرین ۱۷ را حل کنید. این حل، تعداد آرایش‌های نامنظم n شیء را نشان می‌دهد (هیچ چیز در جای مناسب خود نیست).

۱۹. معادلات بازگشتی زیر را با استفاده از معادله مشخصه حل کنید:

(الف) $$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + \log_3 n \qquad \text{for } n > 1,\ n \text{ a power of } 3$$
$$T(1) = 0$$

(ب) $$T(n) = 10T\left(\frac{n}{5}\right) + n^2 \qquad \text{for } n > 1,\ n \text{ a power of } 5$$
$$T(1) = 0$$

(ج) $$nT(n) = (n-1)\, T(n-1) + 3 \qquad \text{for } n > 1$$
$$T(1) = 1$$

(د) $$nT(n) = 3(n-1)\, T(n-1) - 2(n-2)\, T(n-2) + 4^n \qquad \text{for } n > 1$$
$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 0$$

(ه) $$nT^2(n) = 5(n-1)\, T^2(n-1) + n^2 \qquad \text{for } n > 0$$
$$T(0) = 6$$

بخش ۳ـب

۲۰. معادلات بازگشتی تمرین ۱ را به روش جایگزینی حل کنید.

بخش ٤ـب

۲۱. نشان دهید که:

(الف) $f(n) = n^3$ تابع صعودی محض است.

(ب) $g(n) = 2n^3 - 6n^2$ تابع غیرنزولی نهایی است.

۲۲. در مورد تابع $f(n)$ که برای تمام مقادیر n، غیرنزولی و غیرصعودی است، چه می‌توان گفت؟

۲۳. نشان دهید توابع زیر هموار هستند:

(الف) $f(n) = n \lg n$

(ب) $g(n) = n^k$, for all $k \geq 0$

۲۴. در هر حالت فرض کنید T(n) غیرنزولی نهایی است. با استفاده از قضیه ب ـ ۵ مرتبه معادلات بازگشتی زیر را تعیین کنید:

(الف)
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{5}\right) + 6n^3 \qquad \text{for } n > 1,\ n \text{ a power of } 5$$
$$T(1) = 6$$

(ب)
$$T(n) = 40T\left(\frac{n}{3}\right) + 2n^3 \qquad \text{for } n > 1,\ n \text{ a power of } 3$$
$$T(1) = 5$$

(ج)
$$nT(n) = 16T\left(\frac{n}{2}\right) + 7n^4 \qquad \text{for } n > 1,\ n \text{ a power of } 2$$
$$T(1) = 1$$

۲۵. با فرض این‌که در هر مورد T(n) غیرنزولی نهایی است، با استفاده از قضیه ب ـ ۶ مرتبه معادلات بازگشتی زیر را تعیین کنید:

(الف)
$$T(n) = 14T\left(\frac{n}{5}\right) + 6n \qquad \text{for } n > 25,\ n \text{ a power of } 5$$
$$T(25) = 60$$

(ب)
$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n^2 \qquad \text{for } n > 16,\ n \text{ a power of } 4$$
$$T(16) = 50$$

۲۶. بازگشتی زیر را درنظربگیرید:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{c}\right) + g(n) \qquad \text{for } n > 1, n \text{ a power of } c$$
$$T(1) = d$$

در حالت $a > c$، این بازگشتی دارای حل زیر است به‌شرطی‌که $g(n) \in \theta(n)$:

$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_c a}\right)$$

ثابت کنید که اگر فرض کنیم:

$$g(n) \in O\left(n^t\right), \text{ where } t < \log_c a$$

این بازگشتی همان حل را خواهد داشت.