پیوست اول

مروری بر ریاضیات

به جز برای موضوعاتی که با علائم ⊕ یا ◈ مشخص شده‌اند، نیاز به ریاضیات قوی برای مطالعه کتاب نیست. به‌خصوص، فرض کنید که حساب را مطالعه نکردید. اما، برای تحلیل الگوریتم‌ها تا حدی نیاز به ریاضیات است. این پیوست، ریاضیات لازم برای مطالعه این کتاب را مورد بحث قرار می‌دهد.

الف ـ ۱ نمادگذاری

گاهی لازم است به کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی عدد حقیقی x مراجعه کنیم. آن مقدار صحیح را با $\lceil x \rceil$ نمایش می‌دهیم، مثل:

$$\lceil 3.3 \rceil = 4 \qquad \left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = 5 \qquad \lceil 6 \rceil = 6$$

$$\lceil -3.3 \rceil = -3 \qquad \lceil -3.7 \rceil = -3 \qquad \lceil -6 \rceil = -6$$

$\lceil x \rceil$ را **سقف**[1] x گویند. برای هر عدد صحیح n داریم $\lceil x \rceil = n$. گاهی لازم است به بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی عدد حقیقی x مراجعه کنیم. آن عدد صحیح را با $\lfloor x \rfloor$ نمایش می‌دهیم، مثل:

$$\lfloor 3.3 \rfloor = 3 \qquad \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4 \qquad \lfloor 6 \rfloor = 6$$

$$\lfloor -3.3 \rfloor = -4 \qquad \lfloor -3.7 \rfloor = -4 \qquad \lfloor -6 \rfloor = -6$$

$\lfloor x \rfloor$ را **کف**[2] گویند. برای هر عدد صحیح n داریم $\lfloor x \rfloor = n$.

1. Ceiling 2. Floor

وقتی قادر به تعیین تقریبی از نتیجه مطلوب باشیم، از نماد $\approx$ استفاده می‌کنیم که معنای "تقریباً مساوی" است. به‌عنوان‌مثال، باید با عدد π آشنا باشید که در محاسبه مساحت و محیط دایره به کارمی‌رود. مقدار π با تعداد متناهی از ارقام مشخص نمی‌شود، زیرا هرچه ارقام آن بیشتر باشد بهتر است، چون ۶ رقم اول π عبارت‌انداز 3.14159 می‌نویسیم:

$$\pi \approx 3.14159$$

از نماد $\neq$ به معنای "نامساوی" استفاده می‌شود. به‌عنوان‌مثال، اگر بخواهیم بگوییم متغیرهای x و y مساوی نیستند، می‌نویسیم $x \neq y$.

اغلب لازم است به مجموع جملات مراجعه کنیم. اگر تعداد جملات زیاد نباشد، این کار ساده است. به‌عنوان‌مثال، برای مراجعه به مجموع اعداد ۱ تا ۷ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$1+2+3+4+5+6+7$$

اگر بخواهیم به مجموع مربعات اعداد ۱ تا ۷ مراجعه کنیم به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$$

این روش وقتی به کارمی‌رود که تعداد جملات زیاد نباشد، مثلاً برای نمایش مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ مناسب نیست. یک روش این‌است‌که چند جمله اول، جمله عمومی و جمله آخر نوشته شود:

$$1+2+\cdots+i+\cdots+100$$

اگر بخواهیم به مجموع مربعات اعداد ۱ تا ۱۰۰ مراجعه کنیم، به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1^2+2^2+\cdots+i^2+\cdots+100^2$$

گاهی، جمله عمومی با چند جمله اول مشخص می‌شود و لازم نیست آن را بنویسیم:

$$1+2+\cdots+100$$

روش دقیق‌تر برای نمایش مجموع، استفاده از نماد سیگما (Σ) است. برای مثال، مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

به‌همین ترتیب، برای نمایش مجموع مربعات اعداد ۱ تا ۱۰۰ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{100} i^2$$

اغلب می‌خواهیم حالتی را نشان دهیم که آخرین عدد صحیح در یک مجموع، عدد صحیح خاصی مثل n است:

$$1+2+\cdots+i+\cdots+n \qquad \text{یا} \qquad \sum_{i=1}^{n} i$$

به‌طورمشابه، مجموع مربعات اعداد صحیح مثبت ۱ تا n به صورت زیر است:

$$1^2+2^2+\cdots+i^2+\cdots+n^2 \qquad \text{یا} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2$$

برای محاسبه مجموعِ مجموع نیز از علامت سیگما استفاده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{j=1}^{1} j + \sum_{j=1}^{2} j + \sum_{j=1}^{3} j + \sum_{j=1}^{4} j$$
$$= (1) + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) = 20$$

به‌طور مشابه، مجموع مجموع مجموع را نیز می‌توان حساب کرده و غیره.

سرانجام، برای نمایش عددی که از هر عدد حقیقی بزرگ‌تر باشد، از نماد **بی‌نهایت** (∞) استفاده می‌کنیم. برای هر عدد حقیقی x داریم $x < \infty$.

الف ـ ۲ توابع

تابع f از یک متغیر، قانونی است که مقدار x را به مقدار f(x) مربوط می‌کند. به‌عنوان‌مثال، تابع f که مربع یک عدد حقیقی را به یک عدد حقیقی x مربوط می‌کند، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = x^2$$

تابع، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را مشخص می‌کند. به‌عنوان‌مثال، تابع $f(x) = x^2$ تمام زوج‌های مرتب (x, x^2) را مشخص می‌کند. **نمودار** تابع، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را نشان می‌دهد که توسط تابع تعیین می‌شود. نمودار تابع $f(x) = x^2$ در شکل الف ـ ۱ آمده است.

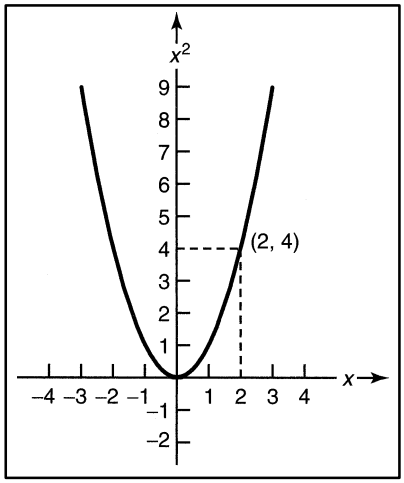
تابع زیر را درنظربگیرید:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

این تابع وقتی تعریف شده است که $x \neq 0$ باشد. **دامنه** تابع، مجموعه‌ای از مقادیر است که تابع برای آن‌ها تعریف شده است. به‌عنوان‌مثال، دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام اعداد حقیقی غیر از صفر است، درحالی‌که دامنه تابع $f(x) = x^2$ تمام اعداد حقیقی است. تابع زیر را درنظربگیرید:

$$f(x) = x^2$$

می‌توان فقط مقادیر غیرمنفی را درنظرگرفت. منظور از "مقادیر غیرمنفی"، مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، ولی منظور از "مقادیر مثبت"، مقادیر بزرگ‌تر از صفر است. بازه $f(x) = x^2$ اعداد حقیقی غیرمنفی و بازه تمام $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام اعداد حقیقی غیر از صفر است و بازه $f(x) = (1/x)^2$ تمام اعداد حقیقی مثبت است. می‌گوییم تابع، از دامنه به **بازه‌اش** تعریف می‌شود. به‌عنوان‌مثال، تابع $f(x) = x^2$ از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی غیرمنفی است.



شکل الف ـ ۱ نمودار تابع $f(x) = x^2$. زوج مرتب (2, 4) توضیح داده شده است.

الف ـ ۳ استقرای ریاضی

بعضی از مجموع‌ها به شکل عبارات بسته‌اند. مثل:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

این تساوی را می‌توانیم با بررسی آن برای چند مقدار از n، توضیح دهیم، مثل:

$$1+2+3+4=10=\frac{4(4+1)}{2}$$
$$1+2+3+4+5=15=\frac{5(5+1)}{2}$$

اما، چون تعداد اعداد صحیح مثبت نامتناهی است، نمی‌توانیم مطمئن باشیم که این تساوی برای تمام مقادیر درست است. بررسی هر یک از موارد، ما را مطمئن می‌سازد که تساوی می‌تواند درست باشد. یک ابزار قدرتمند برای به‌دست‌آوردن نتیجه برای تمام اعداد صحیح و مثبت n، استقرای ریاضی است.

استقرای ریاضی مثل اصل دومینو[1] عمل می‌کند. شکل الف ـ ۲ توضیح می‌دهد که اگر فاصله بین دو دومینو کمتر از ارتفاع دومینوها باشد، اگر اولین دومینو را با انگشت فشار دهیم، همه تحت تأثیر قرار می‌گیرند. این کار را به دلایل زیر می‌توانیم انجام دهیم:

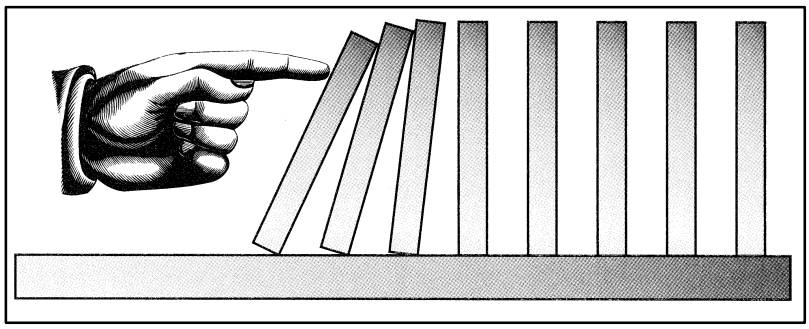
۱. اولین دومینو را فشار می‌دهیم.

۲. اگر فاصله بین دو دومینو همیشه کمتر از ارتفاع آن‌ها باشد، تضمین می‌شود که اگر nاُمین دومینو بیفتد، (n + 1)اُمین دومینو نیز خواهد افتاد.

اگر اولین دومینو را فشار دهیم، آن دومینو، دومینوی دوم را فشار می‌دهد، دومین دومینو، سومی را فشار می‌دهد و غیره. از نظر تئوری، اندازه دومینو هر اندازه دلخواهی می‌تواند باشد، و همگی خواهند افتاد.

اثبات استقرایی به همین ترتیب عمل می‌کند. ابتدا نشان می‌دهیم که آن‌چه به دنبال اثبات آن هستیم، برای n = 1 درست است. سپس نشان می‌دهیم که اگر برای یک عدد صحیح مثبت دلخواه n درست باشد، باید برای n + 1 نیز درست باشد. وقتی این موضوع را نشان دادیم، می‌دانیم که چون برای n = 1 درست است، باید برای n = 2 نیز درست باشد. چون برای n = 2 درست است باید برای n = 3 نیز درست باشد و غیره. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای تمام اعداد صحیح n درست است. هنگام استفاده از استقرا برای اثبات حکمی در مورد اعداد صحیح مثبت، به واژه‌های زیر نیاز داریم:

۱. **پایه‌ی استقرا** اثباتی است که مشخص می‌کند حکمی برای n = 1 (یا هر مقدار اولیه دیگری) درست است.



شکل الف ـ ۲ اگر اولین دومینو فشار داده شود، تمام دومینوها می‌افتند.

1. Domino (نوعی بازی)

۲. **فرض استقرا** مشخص می‌کند حکم برای $n \geq 1$ خاصی درست است.

۳. **گام استقرا** اثباتی است که مشخص می‌کند اگر حکمی برای n خاصی درست باشد، برای $n + 1$ نیز درست است.

• **مثال الف ـ ۱** نشان می‌دهیم که برای تمام اعداد صحیح n داریم:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

پایه‌ی استقرا: برای $n = 1$ داریم:

$$1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$

فرض استقرا: فرض کنید برای یک عدد صحیح مثبت دلخواه n، داریم:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

گام استقرا: باید نشان دهیم که:

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)\,[(n+1)+1]}{2}$$

برای این کار، داریم:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= \mathbf{1 + 2 + \cdots + n} + n + 1 \\ &= \frac{\boldsymbol{n\,(n+1)}}{\mathbf{2}} + n + 1 \\ &= \frac{n\,(n+1) + 2\,(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\,[(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

در گام استقرا، جملاتی را که با فرض استقرا برابراند، مشخص می‌کنیم تا نشان دهیم که فرض استقرا در کجا اِعمال می‌شود. به آن‌چه که در گام استقرا انجام می‌شود، توجه کنید. با توجه به فرض استقرا که داریم:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

و با انجام دستکاری‌های جبری، نتیجه می‌گیریم که:

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)\,[(n+1)+1]}{2}$$

بنابراین، اگر فرض استقرا برای n درست باشد، باید برای $n + 1$ نیز درست باشد. چون در پایه‌ی استقرا نشان دادیم

که برای $n = 1$ درست است، بر اساس اصل دومینو می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای تمام اعداد صحیح مثبت n درست است.

ممکن است تعجب کنید که چطور از همان اول فکر کردیم که تساوی مثال الف ـ ۱ درست است. این، نکته مهمی است. غالباً اگر احتمال می‌دهیم که حکمی درست باشد، چند مورد را بررسی می‌کنیم و بر اساس آموخته‌های خود، حدس می‌زنیم که آن حکم درست باشد. این کار در مورد تساوی مثال الف ـ ۱ نیز انجام شده است. سپس می‌توان با استفاده از استقرا تحقیق کرد که حکم درست است. اگر درست نباشد، استقرا شکست آن را ثابت خواهد کرد. درک این نکته مهم است که هرگز نمی‌توان با استفاده از استقرا حکم درستی را به‌دست‌آورد. بلکه پس از این‌که حدس زدیم حکمی درست است، استقرا نقش خودش را بازی می‌کند. در بخش ۸-۵-۴ استقرای سازنده را بحث کردیم که تکنیکی برای کشف حکم درست است.

نکته مهم دیگر این است‌که لازم نیست مقدار اولیه $n = 1$ باشد. یعنی، ممکن است حکم در صورتی درست باشد که $n \geq 10$ باشد. در این حالت، پایه‌ی استقرا $n = 10$ خواهد بود. در بعضی از موارد، پایه‌ی استقرا ممکن است $n = 0$ باشد. معنایش این است‌که می‌خواهیم ثابت کنیم حکم برای تمام اعداد صحیح غیرمنفی درست است. مثال‌های بیشتری در ادامه آمده است.

• **مثال الف ـ ۲** نشان می‌دهیم که برای تمام اعداد صحیح مثبت n، تساوی زیر برقرار است:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

پایه‌ی استقرا: برای $n = 1$ داریم:

$$1^2 = 1 = \frac{1(n+1)[(2\times 1)+1]}{6}$$

فرض استقرا: فرض کنید برای عدد صحیح و مثبت دلخواه n درست باشد:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

گام استقرا: باید نشان دهیم:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 &= \mathbf{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} + (n+1)^2 \\
&= \frac{\boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}}{\mathbf{6}} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)}{6}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

• **مثال الف ـ ۳** نشان می‌دهیم برای تمام اعداد صحیح غیرمنفی n، داریم:

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

در نمادگذاری مجموع، این تساوی به صورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}-1$$

پایه‌ی استقرا: برای n = 0 داریم:

$$2^0=1=2^{0+1}-1$$

فرض استقرا: فرض می‌کنیم برای عدد صحیح و غیرمنفی دلخواه n برقرار باشد:

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

گام استقرا: باشد نشان دهیم:

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n+1}=2^{(n+1)+1}-1$$

داریم:

$$\begin{aligned}2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n+1}&=\mathbf{2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n}+2^{n+1}\\&=\mathbf{2^{n+1}-1}+2^{n+1}\\&=2\left(2^{n+1}\right)-1\\&=2^{(n+1)+1}-1\end{aligned}$$

مثال الف ـ ۳ حالت خاصی از مثال بعدی است.

• **مثال الف ـ ٤** نشان می‌دهیم برای تمام اعداد صحیح غیرمنفی n و اعداد حقیقی $r \neq 1$ تساوی زیر درست است:

$$\sum_{i=0}^{n}r^i=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

جملات این مجموع را **تصاعد هندسی** می‌نامند.

پایه‌ی استقرا: برای n = 0 داریم:

$$r^0=1=\frac{r^{0+1}-1}{r-1}$$

فرض استقرا: فرض کنید برای عدد صحیح غیرمنفی دلخواه n داریم:

$$\sum_{i=0}^{n}r^i=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

گام استقرا: باید نشان دهیم:

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{r^{(n+1)+1}-1}{r-1}$$

داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} r^i &= r^{n+1} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{r^i} \\ &= r^{n+1} + \frac{\boldsymbol{r^{n+1}-1}}{\boldsymbol{r-1}} \\ &= \frac{r^{n+1}(r-1)+r^{n+1}-1}{r-1} \\ &= \frac{r^{n+2}-1}{r-1} = \frac{r^{(n+1)+1}-1}{r-1}\end{aligned}$$

گاهی می‌توان به روشی غیر از استقرا، راحت‌تر به نتیجه رسید، به عنوان نمونه، مثال قبلی نشان داد که:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

به‌جای استفاده از استقرا، می‌توانیم عبارت سمت چپ این تساوی را در مخرج کسر سمت راست ضرب کنیم:

$$\begin{aligned}(r-1)\sum_{i=0}^{n} r^i &= r\sum_{i=0}^{n} r^i - \sum_{i=0}^{n} r^i \\ &= \left(r + r^2 + \cdots + r^{n+1}\right) - \left(1 + r + r^2 + \cdots + r^n\right) \\ &= r^{n+1} - 1\end{aligned}$$

اگر طرفین را بر r - 1 تقسیم کنیم، نتیجه حاصل به‌دست می‌آید.

- **مثال الف ـ ۵** نشان می‌دهیم که برای تمام اعداد صحیح مثبت n، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)\,2^{n+1} + 2$$

پایه‌ی استقرا: برای n = 1 داریم:

$$1 \times 2^1 = 2 = (1-1)\,2^{1+1} + 2$$

فرض استقرا: فرض کنید برای تمام اعداد صحیح مثبت دلخواه n داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)\,2^{n+1} + 2$$

گام استقرا: باید نشان دهیم:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i2^i = [(n+1)-1]\,2^{(n+1)+1} + 2$$

داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i2^i &= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{i2^i} + (n+1)\,2^{n+1}\\ &= \boldsymbol{(n-1)\,2^{n+1} + 2} + (n+1)\,2^{n+1}\\ &= 2n2^{n+1} + 2\\ &= [(n+1)-1]\,2^{(n+1)+1} + 2\end{aligned}$$

راه دیگر برای فرض استقرا این است که فرض کنیم حکم برای تمام مقادیر k بزرگ‌تر یا مساوی مقدار اولیه و کوچک‌تر از n درست است و سپس در گام استقرا، ثابت کنیم برای n درست است. این کار را در اثبات قضیه ۱-۱ در بخش ۱-۲-۲ انجام دادیم.

گرچه مثال‌های ما به عبارات بسته برای مجموع پرداخته‌اند، ولی ممکن است کاربردهای دیگری از استقرا وجود داشته باشند. بعضی از این موارد را در ادامه بحث خواهیم کرد.

الف ـ ٤ قضایا و لم‌ها

قضیه، گزاره‌ای است که مشخص می‌کند چیزی باید ثابت شود. هر یک از مثال‌های بخش قبلی را می‌توان به صورت یک قضیه بیان کرد، درحالی‌که اثبات استقرایی، اثبات قضیه را انجام می‌دهد. به‌عنوان‌مثال، می‌توانیم مثال الف ـ ۱ را به صورت زیر بیان کنیم.

◀ **قضیه الف ـ ۱**

برای تمام اعداد صحیح $n > 0$، داریم:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

اثبات: از اثبات استقرایی مثال الف ـ ۱ استفاده کنید.

معمولاً هدف از بیان و اثبات قضیه به‌دست‌آوردن یک نتیجه کلی است که می‌تواند به موارد خاصی اِعمال شود. به‌عنوان‌مثال، با استفاده از قضیه الف ـ ۱ می‌توانیم مجموع n عدد صحیح و مثبت نخست را به‌دست‌آوریم. گاهی دانشجویان در درک تفاوت قضایایی که با "اگر" و با "اگر و فقط اگر" مشخص می‌شوند، با مشکل مواجه می‌گردند. دو قضیه زیر، تفاوت آن‌ها را تشریح می‌کند.

◀ **قضیه الف ـ ۲**

برای هر عدد حقیقی x، اگر $x > 0$ باشد آن‌گاه $x^2 > 0$ است.

اثبات: این قضیه از این حقیقت پیروی می‌کند که حاصل‌ضرب دو عدد مثبت، همیشه مثبت است.

معکوس استلزام در قضیه الف ـ ۲ درست نیست. یعنی، درست نیست که بگوییم اگر $x^2 > 0$ آن‌گاه $x > 0$ است. به‌عنوان‌مثال:

$$(-3)^2 = 9 > 0$$

ولی 3- بزرگ‌تر از صفر نیست. درواقع، مربع هر عدد منفی، بزرگ‌تر از صفر است. بنابراین، قضیه الف ـ۲ نمونه‌ای از قضیه "اگر" است. وقتی استلزام معکوس درست باشد، قضیه را "اگر و فقط اگر" گویند و هم استلزام و هم استلزام معکوس باید ثابت شوند. قضیه زیر نمونه‌ای از "اگر و فقط اگر" است.

◀ **قضیه الف ـ ۳**

برای هر عدد حقیقی x ، داریم $x > 0$ اگر و فقط اگر $\frac{1}{x} > 0$ باشد.

اثبات: استلزام را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x > 0$ باشد. آن‌گاه داریم:

$$\frac{1}{x} > 0$$

زیرا خارج قسمت دو عدد مثبت، بزرگ‌تر از صفر است.

اکنون استلزام معکوس را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\frac{1}{x} > 0$ باشد. آن‌گاه داریم:

$$x = \frac{1}{1/x} > 0$$

زیرا خارج قسمت دو عدد مثبت، بزرگ‌تر از صفر است.

در دیکشنری، **لِم** گزاره‌ای کمکی است که برای اثبات گزاره دیگر به کار می‌رود. همانند قضیه، لم گزاره‌ای است که می‌گوید چیزی باید اثبات شود.

الف ـ ۵ لگاریتم‌ها

لگاریتم‌ها یکی از ابزارهای ریاضی‌اند که برای تحلیل الگوریتم‌ها به کار می‌روند. به شرح مختصری از آن‌ها می‌پردازیم.

الف ـ ۵ ـ ۱ تعریف و خواص لگاریتم‌ها

لگاریتم عمومی یک عدد، توانی از ۱۰ است که آن عدد را به‌دست می‌دهد. اگر x عدد موردنظر باشد، لگاریتم عمومی را به صورت $\log x$ نمایش می‌دهیم.

• **مثال الف ـ ۶** چند لگاریتم عمومی عبارت‌اند از:

$\log 10 = 1$ زیرا $10^1 = 10$

$\log 10,000 = 4$ زیرا $10^4 = 10,000$

$\log 0.001 = -3$ زیرا $10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right) = 0.001$

$\log 1 = 0$ زیرا $10^0 = 1$

به یاد دارید که هر عدد به توان صفر، برابر با یک است.

به‌طور کلی، لگاریتم عدد x، توانی از پایه a است که x را تولید می‌کند. a می‌تواند هر عدد مثبتی به‌جز یک باشد ولی x باید مثبت باشد. یعنی، اعداد منفی لگاریتم ندارند.

• **مثال الف ـ ۷** چند نمونه از $\log_a x$ عبارت‌اند از:

$\log_2 8 = 3$	زیرا	$2^3 = 8$
$\log_3 81 = 4$	زیرا	$3^4 = 81$
$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	زیرا	$2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
$\log_2 7 \approx 2.807$	زیرا	$2^{2.807} \approx 7$

توجه کنید که نتیجه آخر در مثال الف ـ ۷، برای عددی است که توان صحیحی از پایه نیست. لگاریتم برای تمام اعداد مثبت وجود دارد، نه فقط برای توان‌های صحیح پایه. بحث در مورد معنای لگاریتم در هنگامی که عدد توان صحیحی از پایه نباشد، خارج از این مقوله است. توجه داریم که لگاریتم، یک تابع صعودی است. یعنی:

اگر $x < y$ آن‌گاه $\log_a x < \log_a y$

لذا:

$$2 = \log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8 = 3$$

در مثال الف ـ ۷ دیدیم که $\log_2 7$ تقریباً 3.807 است که بین ۲ و ۳ می‌باشد.

بعضی از خواص مهم لگاریتم‌هایی که در تحلیل الگوریتم‌ها مفیداند، در ادامه آمده است.

خواص جمع لگاریتم‌ها (در تمام موارد $a > 1$ ، $b > 1$ ، $x > 0$ و $y > 0$).

۱. $\log_a 1 = 0$ ۲. $a^{\log_a x} = x$ ۳. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

۴. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ۵. $\log_a x^y = y \log_a x$ ۶. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

۷. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

• **مثال الف ـ ۸** مثال‌های زیر، خواص جمع لگاریتم‌ها را به کار می‌گیرند:

$2^{\log_2 8} = 8$ (با توجه به خاصیت ۲)

$\log_2 (4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$ (با توجه به خاصیت ۳)

$\log_3 \frac{27}{9} = \log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1$ (با توجه به خاصیت ۴)

$\log_2 4^3 = 3 \log_2 4 = 3 \times 2 = 6$ (با توجه به خاصیت ۵)

$8^{\log_2 4} = 4^{\log_2 8} = 4^3 = 64$ (با توجه به خاصیت ۶)

$\log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2} = 2$ (با توجه به خاصیت ۷)

$\log_2 128 = \frac{\log 128}{\log 2} = \frac{7 \log 2}{\log 2} = 7$ (با توجه به خاصیت ۷)

$\log_3 67 = \frac{\log 67}{\log 3} \approx \frac{1.82607}{0.47712} \approx 3.82728$ (با توجه به خاصیت ۷)

چون اغلب ماشین‌حساب‌ها تابع log را دارند (توجه کنید که منظور از log همان $\log_{10}$ است)، دو نتیجه آخر در مثال الف ـ ۸ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان لگاریتم‌هایی در پایه دیگر را با استفاده از لگاریتم پایه ۱۰ محاسبه کرد. چون از لگاریتم مبنای ۲ به وفور در تحلیل الگوریتم استفاده می‌شود، به‌جای نماد $\log_2 x$ از نماد $\lg x$ استفاده می‌کنیم.

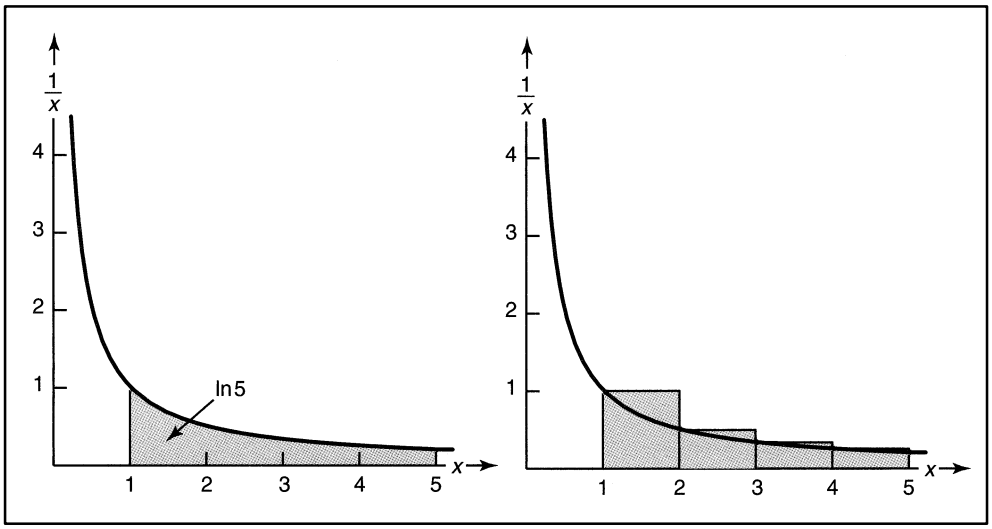
الف ـ ۵ ـ ۲ لگاریتم طبیعی

می‌دانید که مقدار تقریبی e برابر با 2.718281828459 است. همانند π، عدد e را نیز نمی‌توان دقیقاً بیان کرد. $\log_e x$ را به صورت $\ln x$ نمایش می‌دهیم و آن را **لگاریتم طبیعی x** می‌نامیم. به‌عنوان مثال:

$$\ln 10 \approx 2.3025851$$

ممکن است تعجب کنید که این پاسخ از کجا آمده است. این پاسخ را از ماشین‌حسابی که تابع ln دارد به‌دست‌آوردیم. بدون مطالعه حساب، به چگونگی محاسبه لگاریتم طبیعی پی نمی‌برید و نمی‌دانید که چرا "طبیعی" نامیده شد. درواقع، وقتی به e نگاه می‌کنیم، لگاریتم طبیعی باید غیرطبیعی به‌نظربرسد. گرچه بحث در مورد حساب، خارج از این مقوله است، یکی از خواص لگاریتم طبیعی را که برای تحلیل الگوریتم‌ها مفید است شرح می‌دهیم. در حساب می‌توان نشان داد که $\ln x$ مساحت زیر منحنی $\frac{1}{x}$ است که بین ۱ و x قرار می‌گیرد. این موضوع در شکل الف ـ ۳ برای $x = 5$ آمده است. در شکل سمت راست، نشان دادیم که آن مساحت چگونه می‌تواند با جمع مساحت چهارگوش‌هایی با عرض واحد به‌دست‌آید. این نمودار نشان می‌دهد که مقدار تقریبی $\ln 5$ برابر است با:

$$(1 \times 1) + (1 \times \frac{1}{2}) + (1 \times \frac{1}{3}) + (1 \times \frac{1}{4}) \approx 2.0833$$



شکل الف ـ ۳ مساحت سایه‌دار در نمودار سمت چپ $\ln 5$ است. ترکیب مساحت‌های چهارگوش‌های سایه‌دار در شکل سمت راست، تقریبی از $\ln 5$ است.

توجه کنید که این مساحت همیشه بیشتر از مساحت واقعی است. با استفاده از ماشین‌حساب، ln 5 با مقدار 1.60944 تعیین می‌شود. مساحتی که از چهارگوش‌ها به‌دست‌می‌آید، تقریب مناسبی از ln 5 نیست. اما، به آخرین چهارگوش (بین x = 4 و x = 5) می‌پردازیم. این مساحت، با مساحت منحنی بین x = 4 و x = 5 تفاوت زیادی ندارد. این موضوع در مورد اولین چهارگوش صادق نیست. هر چهارگوش، نسبت به چهارگوش قبلی، تقریب بهتری را ارائه می‌کند. لذا، وقتی عدد کوچک نباشد، مجموع مساحت‌های چهارگوش به مقدار لگاریتم طبیعی نزدیک است. مثال زیر، بی‌فایده‌بودن این نتیجه را نشان می‌دهد.

• **مثال الف ـ ۹** فرض کنید می‌خواهیم مقدار زیر را محاسبه کنیم:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

عبارت بسته‌ای برای این مجموع وجود ندارد. اما، بر اساس بحث قبلی، اگر n کوچک نباشد، داریم:

$$(1 \times 1) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(1 \times \frac{1}{n-1}\right) \approx \ln n$$

اگر n کوچک نباشد، مقدار $\frac{1}{n}$ در مقایسه با مجموع قابل چشم‌پوشی است. لذا، می‌توانیم آن جمله را اضافه کرده نتیجه را به‌دست‌آوریم:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln n$$

از این نتیجه در بعضی از تحلیل‌ها استفاده خواهیم کرد. به‌طور کلی، می‌توان نشان داد که:

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

الف ـ ۶ مجموعه‌ها

به‌طور غیررسمی، **مجموعه**، کلکسیونی از اشیا است. مجموعه‌ها را با حروف بزرگی مثل S نشان می‌دهیم و اعضای آن را در آکولاد قرار می‌دهیم. به‌عنوان‌مثال:

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

مجموعه‌ای است که حاوی ۴ عدد صحیح است. ترتیب عناصر مجموعه مهم نیست. معنایش این است که دو مجموعه زیر یکسان هستند:

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad \text{و} \quad \{3, 1, 4, 2\}$$

مثال دیگری از مجموعه عبارت است از:

$$S = \{\text{Wed, Sat, Tues, Sun, Thurs, Mon, Fri}\}$$

این مجموعه شامل اسامی روزهای هفته است. وقتی مجموعه محدود باشد، می‌توانیم آن را با توصیف اعضای آن نمایش دهیم. به‌عنوان‌مثال، اگر بخواهیم مجموعه اعداد صحیح مثبت را نشان دهیم که مضرب صحیحی از ۳ هستند، می‌نویسیم:

$$S = \{n \mid n = 3i \text{، i برای مقادیر صحیح و مثبت}\}$$

روش دیگر نمایش آن به صورت زیر است:

$$S = \{3, 6, 9, ..., 3i, ...\}$$

اشیای موجود در مجموعه را **عناصر** یا **اعضای** مجموعه می‌نامند. اگر x عنصری از مجموعه S باشد، می‌نویسیم $x \in S$. اگر x عنصری از مجموعه S نباشد، می‌نویسیم $x \notin S$. به‌عنوان‌مثال، اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ آن‌گاه $2 \in S$ و $5 \notin S$.

دو مجموعه S و T مساوی‌اند اگر عناصر آن‌ها یکسان باشند و می‌نویسیم $S = T$. اگر مساوی نباشند، می‌نویسیم $S \neq T$. به‌عنوان‌مثال، اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ و $T = \{2, 1, 4, 3\}$ آن‌گاه $S = T$ است.

اگر S و T دو مجموعه باشند که هر عنصر S در T باشد، می‌گوییم S **زیر مجموعه** T است و می‌نویسیم $S \subseteq T$. به‌عنوان‌مثال، اگر $S = \{1, 3, 5\}$ و $T = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ آن‌گاه $S \subseteq T$ است.

هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است. یعنی برای هر مجموعه S داریم، $S \subseteq S$. اگر S زیرمجموعه T باشد ولی مساوی T نباشد، S را **زیر مجموعه محض** T گویند و می‌نویسیم $S \subset T$. به‌عنوان‌مثال، اگر $S = \{1, 3, 5\}$ و $T = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ آن‌گاه $S \subset T$.

برای دو مجموعه T و S، **اشتراک** T و S مجموعه‌ای از عناصر است که در هر دو مجموعه S و T وجود دارد و به صورت $S \cap T$ نوشته می‌شود. به‌عنوان‌مثال، اگر $S = \{1, 4, 5, 6\}$ و $T = \{1, 3, 5\}$ آن‌گاه $S \cap T = \{1, 5\}$.

برای دو مجموعه T و S، **اجتماع** آن‌ها شامل تمام عناصری است که در S یا T هستند و به صورت $S \cup T$ نوشته می‌شود. به‌عنوان‌مثال، اگر $S = \{1, 4, 5, 6\}$ و $T = \{1, 3, 5\}$ آن‌گاه $S \cup T = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ است.

برای دو مجموعه T و S، تفاضل S و T برابر با عناصری است که در S هستند ولی در T نیستند و به صورت $S - T$ نوشته می‌شود. به‌عنوان‌مثال، اگر $S = \{1, 4, 5, 6\}$ و $T = \{1, 3, 5\}$ آن‌گاه $T - S = \{3\}$ و $S - T = \{4, 6\}$.

مجموعه تهی، مجموعه‌ای فاقد عضو است و آن‌را با $\varnothing$ نمایش می‌دهیم. اگر $S = \{1, 4, 6\}$ و $T = \{2, 3, 5\}$ آن‌گاه $S \cap T = \varnothing$.

مجموعه جهانی U، حاوی تمام عناصر موردنظر است. معنایش این است که اگر S هر مجموعه دلخواه باشد، آن‌گاه $S \subseteq U$ است. به‌عنوان‌مثال، اگر اعداد صحیح مثبت را درنظربگیریم، داریم:

$$U = \{1, 2, 3, ... , i, ...\}$$

الف ـ ۷ جایگشت‌ها و ترکیبات

فرض کنید چهار توپ با برچسب‌های A، B، C و D داریم که در یک ظرف بزرگ قرار دارند و دو توپ از ظرف می‌افتند. برای برنده‌شدن در یک مسابقه، باید توپ‌ها را به ترتیب سقوط انتخاب کنیم. برای پی‌بردن به احتمال برنده‌شدن، باید مشخص کنیم چند نتیجه ممکن است رخ دهد. نتایج ممکن عبارت‌اند از:

AB	AC	AD
BA	BC	BD
CA	CB	CD
DA	DB	DC

به‌عنوان‌مثال، نتایج AB و BA متفاوت‌اند، زیرا توپ‌ها را باید به ترتیب انتخاب کنیم. ۱۲ نتیجه ممکن نشان داده شده است. اما آیا می‌توانیم مطمئن باشیم که تمام نتایج نشان داده شده‌اند؟ توجه کنید که نتایج را در چهار سطر و سه ستون

نشان دادیم. هر سطر، انتخاب متمایزی از توپ اول است و چهار انتخاب وجود دارد. وقتی آن انتخاب را انجام دادیم، حروف‌های دوم وارده‌های هر سطر، متناظر با بقیه انتخاب‌های متمایز توپ دوم است. سه انتخاب وجود دارد. لذا، تعداد کل نتایج عبارت‌انداز:

$$(4)(3) = 12$$

این نتیجه را می‌توان تعمیم داد. به‌عنوان‌مثال، اگر چهار توپ داشته باشیم و ۳ توپ بیفتند، اولین توپ، یکی از چهار توپ خواهد بود. وقتی توپ اول افتاد، توپ دوم می‌تواند هر یک از سه توپ باقیمانده باشد. وقتی توپ دوم افتاد، توپ سوم می‌تواند هر یک از دو توپ باقیمانده باشد. لذا تعداد نتایج عبارت‌انداز:

$$(4)(3)(2) = 24$$

به‌طورکلی، اگر n توپ داشته باشیم و k توپ را انتخاب کنیم، تعداد نتایج ممکن عبارت‌انداز:

$$(n)(n - 1)(n - k + 1)$$

این پدیده را تعداد جایگشت‌های n شیء گویند که در هر زمان k شیء انتخاب می‌شوند. اگر $n = 4$ و $k = 3$، نتیجه این فرمول به صورت زیر است:

$$(4)(3) \ldots (4 - 3 + 1) = (4)(3)(2) = 24$$

این، همان نتیجه‌ای است که قبلاً به دست آمده است. اگر $n = 10$ و $k = 5$، نتیجه فرمول به صورت زیر است:

$$(10)(9) \ldots (10 - 5 + 1) = (10)(9)(8)(7)(6) = 30{,}240$$

اگر $k = n$، تمام توپ‌ها را انتخاب خواهیم کرد. این پدیده را تعداد **جایگشت‌های** n شیء می‌نامند. فرمول قبلی نشان می‌دهد که این مقدار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$n(n - 1)(n - n + 1) = n!$$

به یاد دارید که برای یک عدد صحیح مثبت n، مقدار !n برابر با حاصل‌ضرب اعداد صحیح قبل از n و خود n است و !0 را یک تعریف می‌کنیم. فاکتوریل اعداد منفی تعریف نشده است.

سپس، مسابقه‌ای را درنظربگیرید که با انتخاب توپ‌های درست می‌توان برنده شد. یعنی، لازم نیست ترتیب انتخاب توپ‌ها درست باشد. فرض کنید، چهار توپ با برچسب‌های A، B، C و D وجود دارند که دو توپ می‌افتند. هر نتیجه در این مسابقه متناظر با دو نتیجه در مسابقه قبلی است. به عنوان مثال، نتایج AB و BA در این مسابقه یکسان هستند. این نتیجه را **A** و **B** می‌نامیم. چون دو نتیجه در مسابقه قبلی، متناظر با یک نتیجه در این مسابقه است، می‌توانیم با تقسیم تعداد نتایج مسابقه قبلی بر ۲، به تعداد نتایج مسابقه جدید دست پیدا کنیم. یعنی $\frac{(4)(3)}{2} = 6$. نتیجه در این مسابقه وجود دارد. شش نتیجه متمایز عبارت‌انداز:

A و B　　A و C　　A و D　　B و C　　B و D　　C و D

اکنون فرض کنید سه توپ از چهار توپ از ظرف می‌افتند و ترتیب انتخاب آن‌ها مهم نیست. در این صورت، نتایج زیر برای اهداف مسابقه ما یکسان هستند:

ABC　ACB　BAC　BCA　CAB　CBA

این نتایج، جایگشت‌های سه شیء‌اند. به یاد دارید که تعداد این جایگشت‌ها با $3! = 6$ مشخص می‌شود. برای تعیین

تعداد نتایج متمایز، باید !3 را بر تعداد نتایج متمایز مسابقه تقسیم کنیم که ترتیب مهم نیست. یعنی $\frac{(4)(3)(2)}{3!} = 4$ نتیجه در این مسابقه وجود دارد که عبارت‌اند از:

A و B و C A و B و D A و C و D A و D و C

به‌طورکلی، اگر n توپ موجود باشد و k توپ بیفتد و ترتیب مهم نباشد، تعداد نتایج متمایز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{(n)\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

این مقدار، تعداد ترکیبات k شیء از n شیء نام دارد، زیرا داریم:

$$(n)\,(n-1)\cdots(n-k+1) = (n)\,(n-1)\cdots(n-k+1)\times\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

فرمول تعداد ترکیبات k شیء از n شیء به صورت زیر است:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

با استفاده از این فرمول، تعداد ترکیبات انتخاب ۳ شیء از ۸ شیء به صورت زیر است:

$$\frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56$$

قضیه دوجمله‌ای که در کتب جبر اثبات شده است، می‌گوید برای هر عدد صحیح غیرمنفی n و اعداد حقیقی a و b داریم:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}a^k b^{n-k}$$

چون تعداد ترکیبات k شیء از n شیء، برابر با ضریب $a^k b^{n-k}$ در این عبارت است، آن عدد را **ضریب دوجمله‌ای** می‌نامند که به صورت $\binom{n}{k}$ نمایش داده می‌شود.

• **مثال الف ـ ۱۰** نشان می‌دهیم که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عنصری برابر با 2^n است (با احتساب مجموعه تهی). برای $0 \le k \le n$، تعداد زیرمجموعه‌های k عنصری برابر با تعداد ترکیبات k شیء از n شیء است که با $\binom{n}{k}$ مشخص می‌شود. معنایش این است که تعداد کل زیرمجموعه‌ها عبارت است از:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

تساوی سوم از قضیه دوجمله‌ای به‌دست می‌آید.

الف ـ ۸ احتمال

ممکن است با نظریه احتمال در وضعیت‌هایی مثل افتادن توپ از یک ظرف، افتادن یک کارت از مجموعه کارت‌های بازی، و پرتاب سکه آشنا باشید. عمل افتادن توپ، افتادن کارت، یا پرتاب سکه را **آزمایش** می‌گوییم. به‌طورکلی،

وقتی آزمایشی با مجموعه‌ای از نتایج متمایز را انجام می‌دهیم که قابل توصیف باشند، از نظریه احتمال استفاده می‌شود. مجموعه‌ای از نتایج ممکن را **فضای نمونه** یا **جمعیت** گویند. ریاضی‌دانان، معمولاً از "فضای نمونه" و جامعه‌شناسان معمولاً از "جمعیت" استفاده می‌کنند. ما از هر دو واژه استفاده می‌کنیم. هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه را **رویداد** گویند. زیرمجموعه‌ی حاوی یک عنصر را **رویداد ساده** می‌گویند.

• **مثال الف ـ ۱۱** در آزمایش افتادن کارت از مجموعه‌ای از کارت‌ها، فضای نمونه شامل ۵۲ کارت است. مجموعه S یک رویداد و مجموعه E یک رویداد ساده است:

$$S = \{\text{شاه خشت , شاه پیک , شاه گشنیز , شاه دل}\}$$
$$E = \{\text{شاه دل}\}$$

۵۲ رویداد ساده در این فضای نمونه وجود دارد.

معنای رویداد (زیرمجموعه) این است که یکی از عناصر در آن زیرمجموعه، نتیجه آزمایش است. در مثال الف ـ ۱۱ معنای رویداد S این است که کارت برداشته‌شده یکی از ۴ شاه است و معنای رویداد ساده E این است که آن کارت، شاه دل است. میزان اطمینانی که رویدادی حاوی نتیجه یک آزمایش باشد، احتمال آن رویداد است و با یک عدد حقیقی بیان می‌شود. تعریف زیر، معنای احتمال متناهی‌بودن فضای نمونه را ارائه می‌کند.

تعریف فرض کنید یک فضای نمونه حاوی n نتیجه متمایز موجود است:

$$\text{فضای نمونه} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

تابعی که یک عدد حقیقی $p(S)$ را به هر رویداد S نسبت می‌دهد، **تابع احتمال** نام دارد اگر شرایط زیر را برآورده کند:

۱. به ازای $1 \le i \le n$ $\quad 0 \le p(e_i) \le 1$

۲. $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$

۳. برای هر رویداد S که رویداد ساده نیست، $p(S)$ برابر با مجموع احتمال رویدادهای ساده است که نتایج آن در S موجود است. به‌عنوان مثال، اگر:

$$S = \{e_1, e_2, e_7\}$$
$$p(S) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_7)$$

فضای نمونه به همراه تابع p **فضای احتمال** نام دارد.

چون احتمال را به صورت تابعی از یک مجموعه تعریف می‌کنیم، هنگام مراجعه به احتمال یک رویداد ساده، به‌جای $p(e_i)$ باید بنویسیم $p(\{e_i\})$. اما، برای وضوح، این کار را انجام نمی‌دهیم. به همین ترتیب، هنگام مراجعه به احتمال رویداد غیرساده نیز از آکولاد استفاده نمی‌کنیم. به‌عنوان‌مثال، برای احتمال رویداد $\{e_1, e_2, e_7\}$ می‌نویسیم $p(e_1, e_2, e_7)$.

می‌توانیم نتیجه‌ای را به رویداد ساده‌ی حاوی آن نتیجه نسبت دهیم، و لذا می‌توانیم از احتمال یک نتیجه صحبت کنیم. بدیهی است که معنایش احتمال رویداد ساده‌ی حاوی آن نتیجه است.

ساده‌ترین روش نسبت‌دادن احتمالات، استفاده از **اصل بی‌طرفی** است. این اصل می‌گوید که اگر دلیلی برای ارجحیت یک رویداد بر دیگری وجود نداشته باشد، احتمال همه نتایج یکسان است. بر اساس این اصل، وقتی n نتیجه متمایز وجود داشته باشد، احتمال هر کدام از آن‌ها $\frac{1}{n}$ است.

• **مثال الف ـ ۱۲** فرض کنید چهار توپ با برچسب‌های A، B، C و D در یک ظرف وجود دارند و آزمایش، افتادن یک توپ است. فضای نمونه {A, B, C, D} است و بر اساس اصل بی‌طرفی داریم:

$$p(A) = p(B) = p(C) = p(D) = \frac{1}{4}$$

معنای رویداد {A, B} این است که توپ A یا B می‌افتد. احتمال آن به صورت زیر است:

$$p(A, B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

• **مثال الف ـ ۱۳** فرض کنید آزمایشِ برداشتن کارت بالایی را انجام می‌دهیم. چون ۵۲ کارت وجود دارد، بر اساس اصل بی‌طرفی احتمال هر کارت $\frac{1}{52}$ است. به‌عنوان‌مثال:

$$p(\text{شاه دل}) = \frac{1}{52}$$

رویداد زیر را درنظربگیرید:

$$S = \{\text{شاه دل} , \text{شاه پیک} , \text{شاه گشنیز} , \text{شاه خشت}\}$$

معنای این رویداد این است که کارتی که برداشته می‌شود، شاه است. احتمال آن به صورت زیر است:

$$p(S) = p(\text{شاه دل}) + p(\text{شاه پیک}) + p(\text{شاه گشنیز}) + p(\text{شاه خشت}) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$$

گاهی می‌توانیم احتمالات را با استفاده از فرمول‌های جایگشت و ترکیبات به‌دست‌آوریم. مثال‌های زیر، از این روش‌ها استفاده می‌کنند.

• **مثال الف ـ ۱۴** فرض کنید پنج توپ با برچسب‌های A، B، C، D و E در یک ظرف وجود دارند و آزمایش، افتادن سه توپ است که ترتیب آن‌ها مهم نیست. احتمال p(A و B و C) را محاسبه می‌کنیم. به یاد دارید که معنای "A و B و C" این است که A، B و C به هر ترتیبی انتخاب می‌شوند. برای تعیین احتمال با استفاده از اصل بی‌طرفی، باید تعداد نتایج متمایز را محاسبه کنیم. یعنی، باید تعداد ترکیبات سه شیء از پنج شیء را محاسبه کنیم. با استفاده از فرمول بخش قبل داریم:

$$\frac{5!}{3!\,(5 - 3)!} = 10$$

بنابراین، بر اساس اصلی بی‌طرفی داریم:

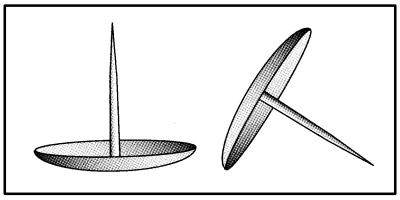
$$p(A, B, C) = \frac{1}{10}$$

که برابر با احتمالات ۹ نتیجه‌ی دیگر است.

اغلب، دانشجویانی که فرصت ندارند نظریه احتمال را به دقت مطالعه کنند، فکر می‌کنند احتمال همان نسبت‌ها است. درواقع، اغلب کاربردهای مهم احتمال، کاری با احتمال ندارند. برای روشن‌شدن موضوع، دو مثال ساده ارائه می‌شود.

کتاب‌های احتمال، در مورد پرتاب سکه بحث می‌کنند. به دلیل متقارن‌بودن سکه، برای تعیین احتمال از اصل بی‌طرفی استفاده می‌کنیم. بنابراین، داریم:

$$p(\text{شیر}) = p(\text{خط}) = \frac{1}{2}$$



شکل الف ـ ۴ دو روش پایین‌آمدن پونز. به‌دلیل نامتقارن‌بودن پونز، احتمال این دو روش یکسان نیست.

از طرف دیگر، می‌توانیم پونز را پرتاب کنیم. همانند سکه، پونز نیز می‌تواند از دو طرف به زمین بیاید. می‌تواند از طرف صاف (شیر) یا از طرف لبه (خط) به زمین برخورد کند. فرض می‌کنیم، از طرف نوک نیز نمی‌تواند به زمین برخورد کند. این دو روش برخورد با زمین در شکل الف ـ ۴ آمده است. با استفاده از اصطلاحات سکه، طرف صاف را "شیر" و نتیجه دیگر را "خط" می‌نامیم. چون پونز متقارن نیست. دلیلی وجود ندارد که برای تعیین احتمال "شیر" یا "خط" از اصل بی‌طرفی استفاده شود. این احتمالات را چگونه تعیین کنیم؟ در مورد سکه، وقتی می‌گوییم $p(\text{شیر}) = \frac{۱}{۲}$ است، به‌طور ضمنی فرض می‌کنیم که اگر سکه را ۱۰۰۰ بار پرتاب کنیم، ۵۰۰ بار شیر می‌آید. درواقع، اگر فقط ۱۰۰ بار شیر بیاید، متوجه می‌شویم که وزن آن مناسب نبود و احتمال آن $\frac{۱}{۲}$ نبوده است. این فرضیه اجرای مکرر یک آزمایش، روشی را برای محاسبه احتمال ارائه می‌کند. یعنی اگر آزمایشی را چندین بار تکرار کنیم، می‌توانیم مطمئن باشیم که احتمال یک نتیجه تقریباً برابر با کسری از تعداد دفعاتی است که واقعاً رخ می‌دهد (بعضی از دانشمندان، احتمال را حد این کسر در هنگامی می‌دانند که عدد به سمت بی‌نهایت میل می‌کند). به‌عنوان‌مثال، یکی از دانشجویان، پونز را ۱۰,۰۰۰ بار پرتاب کرد و ۳,۷۶۱ بار از طرف صاف (شیر) به زمین آمد. لذا، داریم:

$$p(\text{شیر}) \approx \frac{3,761}{10,000} = 0.3761 \qquad p(\text{خط}) \approx \frac{6239}{10,000} = 0.6239$$

می‌بینیم که احتمال دو رویداد یکسان نیست، ولی احتمالات هنوز یک است. این روش تعیین احتمال را **روش فراوانی نسبی** می‌نامند. وقتی احتمالات از طریق فراوانی نسبی تهیه می‌شوند، از نماد $\approx$ استفاده می‌کنیم، زیرا نمی‌توانیم مطمئن باشیم که بدون توجه به تعداد خطاها، احتمال فراوانی نسبی درست است. به‌عنوان‌مثال، فرض کنید دو توپ با برچسب‌های A و B داریم و آزمایش انتخاب یک توپ را ۱۰,۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم. نمی‌توانیم مطمئن باشیم که توپی با برچسب A دقیقاً ۵,۰۰۰ بار انتخاب می‌شود. ممکن است فقط ۴,۹۶۷ بار انتخاب گردد. با استفاده از اصل بی‌طرفی، داریم:

$$p(A) = 0.5$$

درحالی‌که از روش فراوانی نسبی داریم:

$$p(A) \approx 0.4967$$

روش فراوانی نسبی، به آزمایش‌هایی فقط با دو نتیجه‌ی ممکن محدود نمی‌شود. به‌عنوان‌مثال، اگر یک تاس شش وجهی داشته باشیم که مکعب کامل نباشد، احتمالات شش رویداد ساده ممکن است متفاوت باشد. اما، مجموع آن‌ها یک است. مثال زیر، این وضعیت را تشریح می‌کند.

• **مثال الف ـ ۱۵** فرض کنید سه تاس ۶ وجهی نامتقارن داریم و در ۱۰۰۰ بار پرتاب، مشخص شد که شش وجه به تعداد زیر ظاهر شدند:

وجه	تعداد دفعات
1	200
2	150
3	100
4	250
5	120
6	180

آن‌گاه داریم:

$$p(1) \approx 0.2 \qquad p(2) \approx 0.15 \qquad p(3) \approx 0.1 \qquad p(4) \approx 0.25 \qquad p(5) \approx 0.12 \qquad p(6) \approx 0.18$$

بر اساس شرط ۳ از تعریف فضای احتمال، داریم:

$$p(2, 3) = p(2) + p(3) \approx 0.15 + 0.1 = 0.25$$

این مقدار، احتمال ظاهرشدن ۲ یا ۳ در پرتاب تاس است.

روش‌های دیگری برای تعیین احتمال وجود دارد که هیچ‌کدام از آن‌ها فرضیه احتمال را به‌عنوان درجه‌ای از **اعتقاد** در یک نتیجه نمی‌دانند. به‌عنوان‌مثال، فرض کنید Chicago Bears می‌خواهد در یک بازی فوتبال، Dallas Cowboys را به بازی بگیرد. در هنگام نوشتن این کتاب، یکی از مولفین آن دلیل اندکی دارد که Bears برنده می‌شود. لذا، احتمال یکسانی به هر تیم برنده داده نمی‌شود. چون بازی چندین بار تکرار نمی‌شود، نمی‌تواند احتمالات را به روش فراوانی نسبی به‌دست‌آورد. اگر بخواهد بر روی بازی شرط‌بندی کند، می‌خواهد به احتمال برنده‌شدن Bears دستیابی داشته باشد. او می‌تواند این کار را با استفاده از روش **ذهن‌گرایانه**[1] انجام دهد. یک روش به‌دست‌آوردن احتمال در این راهبرد به صورت زیر است: اگر بلیت مسابقه برای برنده‌شدن Bears یک دلار باشد، فرد می‌تواند تعیین کند که در صورت برنده‌شدن Bears بلیت چقدر ارزش دارد. یکی از مولفین احساس کرد که تقریباً ۵ دلار می‌ارزد. معنایش این است‌که فقط اگر در رویداد برنده‌شدن Bears، بلیت حداقل ۵ دلار ارزش داشته باشد، او یک دلار می‌پردازد. احتمال برنده‌شدن Bears برای او، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p(\text{برنده‌شدن Bears}) = \frac{\$1}{\$5} = 0.2$$

یعنی، احتمال با توجه به اعتقاد به شرط‌بندی تهیه می‌شود. این روش به این دلیل "ذهن‌گرایانه" نامیده می‌شود که ممکن است کس دیگری فکر کند که بلیت ۴ دلار ارزش دارد. برای این فرد $p(\text{برنده‌شدن Bears}) = 0.25$ است. هیچ‌کدام از این دو نفر، از نظر منطقی اشتباه نمی‌کنند. وقتی احتمالی، اعتقاد فردی را نشان می‌دهد، احتمال درستِ یکتا وجود ندارد. احتمال، تابعی از اعتقاد فرد است و به معنای "ذهن‌گرایانه‌بودن" می‌باشد. اگر کسی اعتقاد داشته باشد که میزان برنده‌شدن باید برابر با میزان شرط‌بندی باشد (یعنی بلیت ۲ دلار ارزش دارد)، آن‌گاه احتمال موردنظر این فرد به صورت زیر است:

$$p(\text{برنده‌شدن Bears}) = \frac{\$1}{\$2} = 0.5$$

می‌بینیم که احتمال، فراتر از نسبت‌ها است.

---

1. Subjectivistic

الف-۸-۱ تصادفی‌سازی

گرچه واژه "تصادفی" در محاوره استفاده می‌شود، ولی تعریف تصادفی‌سازی دشوار است. تصادفی‌سازی شامل فرآیندی است. از نظر شهودی، منظور از **فرآیند تصادفی** این‌است‌که: اولاً فرآیند باید قادر به تولید دنباله‌ای طولانی از نتایج باشد. به‌عنوان‌مثال، فرآیند پرتاب مکرر یک سکه می‌تواند دنباله طولانی از نتایج را ایجاد کند که شیر یا خط باشند. ثانیاً، نتایج باید غیرقابل پیش‌بینی باشد. منظور از "غیرقابل پیش‌بینی" تا حدی مبهم است. به‌نظرمی‌رسد که باید به نقطه شروع برگردیم. جایی که "تصادفی" را با "غیر قابل پیش‌بینی" جایگزین کردیم.

در اوایل قرن ۲۰، ریچارد وان میس، مفهوم تصادفی‌سازی را دقیقاً مشخص کرد. او گفت، فرآیند "غیر قابل پیش‌بینی" نباید راهبرد قماربازی موفق را مجاز بداند. یعنی، اگر بر روی نتیجه چنین فرآیندی شرط‌بندی کنیم، نمی‌توانیم شانس برنده‌شدن خود را از طریق شرط‌بندی بر روی زیردنباله‌ای از نتایج (به‌جای هر یک از نتایج) افزایش دهیم. به‌عنوان‌مثال، فرض کنید تصمیم می‌گیریم بر روی شیرها در پرتاب تکراری سکه شرط‌بندی کنیم. اغلب احساس می‌کنیم که نمی‌توانیم به جای شرط‌بندی بر روی هر پرتاب دیگر به‌جای هر پرتاب، شانس خود را افزایش دهیم. علاوه‌براین، اغلب احساس می‌کنیم که زیردنباله "ویژه" دیگری وجود ندارد که شانس ما را افزایش دهد. درواقع، اگر نتوانیم از طریق شرط‌بندی بر روی زیردنباله‌ای شانس خود را افزایش دهیم، آن‌گاه پرتاب تکراری سکه فرآیند تصادفی خواهد بود. به‌عنوان‌مثال دیگر، فرض کنید افرادی را از جامعه دچار سرطان و سالم نمونه‌برداری کردیم و قبل از نمونه‌برداری فرد بعدی، فرد قبلی را به جامعه برگردانیم (**نمونه‌برداری جایگزینی**). شرط‌بندی بر روی سرطان را انتخاب می‌کنیم. اگر به این روش نمونه‌برداری کنیم تا به فرد خاصی امتیاز داده نشود، اغلب احساس می‌کنیم که با شرط‌بندی بر روی زیردنباله به‌جای شرط‌بندی در هر بار، نمی‌توانیم شانس خود را افزایش دهیم. اگر نتوانیم از طریق شرط‌بندی بر روی یک زیردنباله، شانس خود را افزایش دهیم، آن‌گاه فرآیند نمونه‌برداری، تصادفی خواهد بود. اما، اگر از هر چهار بار، یک بار اولویت را به سیگاری‌ها بدهیم و در بقیه موارد از کل جامعه نمونه‌برداری کنیم، این فرآیند تصادفی نخواهد بود، زیرا از طریق شرط‌بندی در $\frac{1}{4}$ بار به جای هر بار، می‌توانیم شانس خود را افزایش دهیم.

از نظر شهودی، وقتی می‌گوییم "طوری نمونه‌برداری می‌کنیم که هیچ فرد خاصی ارجح نباشد" منظور ما این‌است‌که در نمونه‌برداری از هیچ الگویی استفاده نمی‌شود. به‌عنوان‌مثال، اگر توپ‌ها را با جایگزینی در ظرف نمونه‌برداری می‌کردیم، هیچ توپی ارجح نبود. وقتی نمونه‌برداری از جامعه انسانی انجام می‌شود، نمی‌توان به آسانی مطمئن شد که ارجحیت قائل نشده‌ایم. بحث در مورد روش‌های نمونه‌برداری خارج از این پیوست است.

نظر وان میس در مورد عدم استفاده از راهبرد موفق قماربازی، موجب درک بهتر از تصادفی‌سازی می‌شود. **فرآیند غیرتصادفی** یا قابل پیش‌بینی می‌تواند از راهبرد قماربازی موفق استفاده کند. یک مثال از فرآیند غیرتصادفی در بالا مطرح شد و آن انتخاب سیگاری‌ها در $\frac{1}{4}$ دفعات است.

گرچه وان‌میس توانست درک بهتری از تصادفی‌سازی ارائه کند، نتوانست تعریف ریاضی دقیقی را مطرح نماید. آندری کولموگوروف این کار را با مفهوم **دنباله‌های فشرده‌شدنی** انجام داد. یک دنباله متناهی، **دنباله فشرده‌شدنی** است اگر کدگذاری آن، نسبت به کدگذاری هر یک از عناصر دنباله، طول کمتری داشته باشد. به‌عنوان‌مثال، دنباله زیر را درنظربگیرید:

1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0

در این دنباله، "0 1" به تعداد ۱۶ بار تکرار شد که به‌جای آن می‌توان از دنباله زیر استفاده کرد:

1 6 1 0

چون تعداد بیت‌های آن کمتر از کدگذاری هر یک از عناصر آن است، این دنباله را فشرده‌شدنی می‌نامند. دنباله متناهی که فشرده‌شدنی نباشد، **دنباله تصادفی** نام دارد. دنباله زیر را درنظربگیرید:

1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1

این دنباله تصادفی است، زیرا نمایش موثرتری ندارد. از نظر شهودی، دنباله تصادفی، دنباله‌ای است که هیچ نظم یا الگویی ندارد.

بر اساس نظریه کولموگوروف، **فرآیند تصادفی** فرآیندی است که اگر به اندازه کافی ادامه یابد، دنباله تصادفی را تولید می‌کند. به‌عنوان‌مثال، فرض کنید مکرراً سکه‌ای را پرتاب کنیم و یک را برای شیر و صفر را برای خط درنظربگیریم. پس از ۶ پرتاب، دنباله زیر به‌دست‌می‌آید:

1 0 1 0 1 0

اما، بر اساس نظریه کولموگوروف، کل این دنباله نظم خاصی ندارد. تعریف فرآیند تصادفی با مشکلات فلسفی مواجه است، مثل این نکته که: **قطعاً** یک دنباله تصادفی تولید می‌کند. بسیاری از احتمال‌کاران، احساس می‌کنند که به احتمال زیاد، دنباله‌ای تصادفی است ولی این احتمال وجود دارد که دنباله‌ای تصادفی نباشد. به‌عنوان‌مثال، در پرتاب تکراری سکه، آن‌ها اعتقاد دارند که، گرچه بعید است، ولی ممکن‌است دفعات زیادی خط بیاید. همان‌طور که گفته شد، تصادفی‌سازی مفهوم دشواری است. حتی امروزه نیز اختلاف نظرهایی در مورد خواص آن وجود دارد.

اکنون ببینیم تصادفی‌سازی چه ارتباطی با احتمال دارد. فرآیند تصادفی، یک فضای احتمال را تعیین می‌کند و هر بار که فرآیند نتیجه‌ای را تولید می‌کند، آزمایشی در آن فضا انجام می‌گیرد. این موضوع در مثال‌های بعدی مطرح می‌شود.

- **مثال الف ـ ۱۶** فرض کنید یک ظرف حاوی یک توپ سفید و یک توپ سیاه است و مکرراً توپی از آن برمی‌داریم و به آن برمی‌گردانیم. این فرآیند تصادفی، یک فضای تصادفی را تعیین می‌کند که در آن:

$$p(\text{سیاه}) = p(\text{سفید}) = 0.5$$

هر وقت توپی از ظرف برداشته می‌شود، آزمایشی در این فضا انجام می‌گیرد.

- **مثال الف ـ ۱۷** پرتاب تکراری تاس شش وجهی نامتقارن در مثال الف ـ ۱۵ یک فرآیند تصادفی است که یک فضای احتمال را تعیین می‌کند که در آن:

$$p(1) \approx 0.2 \qquad p(2) \approx 0.15 \qquad p(3) \approx 0.1 \qquad p(4) \approx 0.25 \qquad p(5) \approx 0.12 \qquad p(6) \approx 0.18$$

هر وقت تاسی را پرتاب می‌کنیم، آزمایش را در این فضا انجام می‌دهیم.

- **مثال الف ـ ۱۸** فرض کنید جامعه‌ای با n نظر داریم که بعضی از آن‌ها سرطان دارند و افراد را از طریق جایگزینی نمونه‌برداری می‌کنیم و نمونه‌برداری طوری است که هیچ‌کس ارجح نیست. این فرآیند تصادفی، یک فضای احتمال را تعیین می‌کند که در آن، جامعه فضای نمونه است و احتمال هر فردی که نمونه‌برداری می‌شود

(رویداد ساده) برابر با $\frac{1}{n}$ است. احتمال این‌که فرد سرطانی نمونه‌برداری شود برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد افراد سرطانی}}{n}$$

هر بار که آزمایش را انجام می‌دهیم، می‌گوییم فردی را **به‌طور تصادفی** از جامعه انتخاب می‌کنیم. مجموعه‌ای از نتایج در هر تکرار آزمایش، **نمونه تصادفی** جامعه نام دارد. با استفاده از تکنیک‌های آماری می‌توان نشان داد که اگر یک نمونه تصادفی بزرگ باشد، نمونه با احتمال زیادی جامعه را نشان می‌دهد. به‌عنوان‌مثال، اگر نمونه تصادفی بزرگ باشد، و $\frac{1}{3}$ افراد نمونه‌برداری شده سرطانی باشند، به احتمال زیاد، $\frac{1}{3}$ افراد جامعه سرطانی‌اند.

• **مثال الف ـ ۱۹** فرض کنید یک دسته کارت بازی موجود است و آن‌ها را در یک دنباله قرار دادیم. این فرآیند تصادفی نیست و کارت‌ها به‌طور تصادفی انتخاب نمی‌شوند. این فرآیند غیرتصادفی، هر وقت نتیجه‌ای تولید می‌شود یک فضای احتمال مختلف را ایجاد می‌کند. در بار اول، احتمال هر کارت $\frac{1}{52}$ است. در بار دوم، احتمال کارتی که بار اول برداشته شد صفر و احتمال بقیه کارت‌ها $\frac{1}{51}$ است و غیره.

فرض کنید مکرراً کارت بالایی را برمی‌داریم، سپس دوباره آن را به ورق‌ها اضافه کرده ورق‌ها را بُر می‌زنیم. آیا این فرآیند تصادفی است؟ و آیا کارت‌ها به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند؟ پاسخ منفی است. بازی‌کنان حرفه‌ای اعتقاد دارند که کارت‌ها باید ۷ بار بُر بخورند تا به خوبی مخلوط شوند.

گرچه فرضیه وان میس در مورد تصادفی‌سازی امروزه خوشایند به‌نظرمی‌رسد، دیدگاهش در زمان ارائه این نظریه چندان مورد اقبال واقع نشد. سرسخت‌ترین مخالف او، پرفسور ک. مارب بود.

الف ـ ۸ ـ ۲ مقدار مورد انتظار

مقدار مورد انتظار را با مثالی شرح می‌دهیم.

• **مثال الف ـ ۲۰** فرض کنید چهار دانشجو با قدهای ۶۸، ۷۲، ۶۷ و ۷۴ اینچ داریم. میانگین قد آن‌ها به صورت زیر است:

$$\text{میانگین قد} = \frac{68 + 72 + 67 + 74}{4} = 70.25 \text{ اینچ}$$

اکنون فرض کنید ۱۰۰۰ دانشجو داریم که قد آن‌ها با درصدهای زیر توزیع شده است:

قد برحسب اینچ	درصد دانشجویان
66	20
68	25
71	30
72	10
74	15

برای محاسبه میانگین قد، می‌توانیم ابتدا قد هر دانشجو را حساب کنیم و مثل قبل عمل نماییم. اما، بهتر است میانگین را به صورت زیر به‌دست‌آوریم:

$$\text{میانگین قد} = 66(0.2) + 68(0.25) + 71(0.3) + 72(0.1) + 74(0.15) = 69.8 \text{ اینچ}$$

توجه کنید که درصدها در این مثال، احتمالاتی هستند که با استفاده از اصل بی‌طرفی به‌دست آمده‌اند. یعنی، معنای این حقیقت که ۲۰٪ دانشجویان ۶۶ اینچ قد دارند، این است که قد ۲۰۰ دانشجو ۶۶ اینچ است و اگر دانشجویی را به‌طور تصادفی از ۱۰۰۰ دانشجو انتخاب کنیم، داریم:

$$p(\text{قد ۶۶ اینچ}) = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} = ۰/۲$$

به‌طورکلی، مقدار مورد انتظار به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف فرض کنید یک فضای احتمال با فضای نمونه زیر داریم:

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

و به هر نتیجه e_i، یک عدد حقیقی $f(e_i)$ وابسته است. در این صورت، $f(e_i)$ **متغیر تصادفی** در فضای نمونه نام دارد و **مقدار مورد انتظار** یا میانگین $f(e_i)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(e_1)\,p(e_1) + f(e_2)\,p(e_2) + \cdots + f(e_n)\,p(e_n)$$

متغیرهای تصادفی، به این دلیل "تصادفی" نامیده می‌شوند که فرآیندهای تصادفی می‌توانند مقادیر متغیرهای تصادفی را تعیین کنند. واژه "متغیر شانس" به‌جای متغیر تصادفی به کار می‌رود.

• **مثال الف ـ ۲۱** فرض کنید تاس شش وجهی نامتقارن مثال الف ـ ۱۵ را در اختیار داریم. یعنی:

$$\begin{array}{ll} p(1) \approx 0.2 & p(4) \approx 0.25 \\ p(2) \approx 0.15 & p(5) \approx 0.12 \\ p(3) \approx 0.1 & p(6) \approx 0.18 \end{array}$$

فضای نمونه شامل شش وجه مختلف است، متغیر تصادفی در این فضای نمونه عددی است که بر روی وجه نوشته شده است، و مقدار مورد انتظار این متغیر تصادفی برابر است با:

$$\begin{aligned} &1\,p(1) + 2\,p(2) + 3\,p(3) + 4\,p(4) + 5\,p(5) + 6\,p(6) \\ &\approx 1\,(0.2) + 2\,(0.15) + 3\,(0.1) + 4\,(0.25) + 5\,(0.12) + 6\,(0.18) = 3.48 \end{aligned}$$

اگر تاس را چندین بار پرتاب کنیم، انتظار داریم میانگین اعدادی که نمایش داده می‌شوند تقریباً ۳/۴۸ باشد.

یک فضای نمونه، فاقد متغیر تصادفی یکتایی است که در آن تعریف شده است. متغیر تصادفی دیگر در این فضای نمونه می‌تواند تابعی باشد که اگر عدد زوج بیاید مقدار یک و اگر عدد فرد بیاید مقدار صفر را تعیین کند. مقدار مورد انتظار این متغیر تصادفی برابر است با:

$$\begin{aligned} &0\,p(1) + 1\,p(2) + 0\,p(3) + 1\,p(4) + 0\,p(5) + 1\,p(6) \\ &\approx 0\,(0.2) + 1\,(0.15) + 0\,(0.1) + 1\,(0.25) + 0\,(0.12) + 1\,(0.18) = .58 \end{aligned}$$

• **مثال الف ـ ۲۲** فرض کنید فضای نمونه ما ۱۰۰۰ دانشجوی مثال الف ـ ۲۰ است. قد که در مثال الف ـ ۲۰ محاسبه شد، یک متغیر تصادفی در این فضای نمونه است. متغیر تصادفی دیگر، وزن است. اگر وزن بر اساس درصدهای زیر توزیع شده باشد:

وزن برحسب پوند	درصد دانشجویان
130	15
145	35
160	30
170	10
185	10

مقدار مورد انتظار این متغیر تصادفی برابر است با:

130(0.15) + 145(0.35) + 160(0.30) + 170(0.10) + 185(0.10) = 153.75 پوند

تمرین‌ها

بخش الف ـ ۱

۱. هر یک از موارد زیر را تعیین کنید:

(الف) $\lfloor 2.8 \rfloor$ (ب) $\lfloor -10.42 \rfloor$ (ج) $\lceil 4.2 \rceil$

(د) $\lceil -34.92 \rceil$ (ه) $\lfloor 5.2 - 4.7 \rfloor$ (و) $\lceil 2\pi \rceil$

۲. نشان دهید $\lceil n \rceil = -\lfloor -n \rfloor$.

۳. نشان دهید که برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

۴. نشان دهید که برای اعداد صحیح $a > 0$ و $n, b > 0$ داریم:

(الف) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n$

(ب) $\left\lfloor \frac{\lfloor n/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$

۵. هر یک از جمع‌های زیر را با استفاده از نماد Σ بنویسید:

(الف) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(99) + 2(100)$

(ب) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1) + 2n$

(ج) $3 + 12 + 27 + \cdots + 1200$

۶. هر یک از جمع‌های زیر را ارزیابی کنید:

(الف) $\sum_{i=1}^{5} (2i + 4)$

(ب) $\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 4i)$

(ج) $\sum_{i=1}^{200} \left(\frac{i}{i+1} - \frac{i-1}{i} \right)$

(راهنمایی: اگر دو یا سه جمله اول را بدون ساده‌سازی می‌نویسید، باید الگویی را پیدا کنید).

(د) $\sum_{i=0}^{5} \left(2^i n^{5-i}\right)$

(ه) $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{i} (j+5)$

بخش الف ـ ۲

۷. تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ را رسم کنید. دامنه و برد آن کدام است؟

۸. تابع $f(x) = (x - 2) / (x + 5)$ را رسم کنید. دامنه و برد آن کدام است؟

۹. تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۰. تابع $f(x) = \lceil x \rceil$ را رسم کنید. دامنه و برد آن کدام است؟

بخش الف ـ ۳

۱۱. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که تساوی زیر به ازای هر $n > 0$ برقرار است:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$$

۱۲. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که $n^2 - n$ برای هر عدد صحیح و مثبت n، زوج است.

۱۳. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که برای تمام اعداد صحیح $n > 4$ داریم: $2^n > n^2$.

۱۴. بااستفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که برای تمام اعداد صحیح $n > 0$ داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

بخش الف ـ ٤

۱۵. ثابت کنید که اگر a و b اعداد صحیح فرد باشند، $a + b$ زوج است. آیا استلزام معکوس درست است؟

۱۶. ثابت کنید که $a + b$ فرد است اگر و فقط اگر a و b هر دو فرد یا هر دو زوج باشند.

بخش الف ـ ۵

۱۷. هر یک از موارد زیر را تعیین کنید:

(الف) $\log 1{,}000$ (ب) $\log 100{,}100$ (ج) $\log_4 64$

(د) $\lg \frac{1}{16}$ (ه) $\log_5 125$ (و) $\log 23$

(ز) $\lg(16 \times)$ (ح) $\log(1{,}000/100{,}000)$ (ط) $2^{\lg 125}$

۱۸. توابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = \lg x$ را در یک سیستم مشخصات رسم کنید.

۱۹. مقادیری برای x مشخص کنید که داشته باشیم: $x^2 + 6x + 12 > 8x + 20$.

۲۰. مقادیری برای x تعیین کنید که $x > 500 \lg x$ باشد.

۲۱. نشان دهید $f(x) = 2^{3 \lg x}$ تابع نمایی نیست.

۲۲. نشان دهید که برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم:

$$\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg (n+1) \rceil$$

۲۳. با استفاده از تقریب استرلینگ برای !n، فرمولی برای محاسبه lg(n!) بیابید (برای مقدار بزرگ n):

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

بخش الف ـ ۶

۲۴. فرض کنید $U = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ ، $S = \{2, 4, 5, 10\}$ و $T = \{2, 6, 8, 10\}$ (U مجموعه جهانی است).
هر یک از موارد زیر را تعیین کنید:

(الف) $S \cup T$ **(ب)** $S \cap T$ **(ج)** $S - T$

(د) $T - S$ **(ه)** $((S \cap T) \cup S)$ **(و)** $U - S$ (متمم S)

۲۵. اگر S دارای n عنصر باشد، نشان دهید که S دارای n زیرمجموعه است.

۲۶. فرض کنید |S| تعداد عناصر S باشد. اعتبار عبارت زیر را نشان دهید:

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$$

۲۷. نشان دهید که موارد زیر هم‌ارز هستند:

(الف) $S \subset T$ **(ب)** $S \cap T = S$ **(ج)** $S \cup T = T$

بخش الف ـ ۷

۲۸. تعداد جایگشت‌های ۶ شیء از ۱۰ شیء را تعیین کنید.

۲۹. تعداد ترکیبات ۶ شیء از ۱۰ شیء را تعیین کنید. یعنی مقدار $\binom{10}{6}$ را تعیین نمایید.

۳۰. فرض کنید مسابقه‌ای وجود دارد که در آن چهار توپ از ده توپ موجود در ظرف می‌افتد. بلیت برنده باید توپ‌ها را به‌ترتیب افتادن نشان دهد. چند بلیت قابل تمایز وجود دارد؟

۳۱. فرض کنید مسابقه‌ای وجود دارد که در آن چهار توپ از سطلی با محتویات ۱۰ توپ می‌افتد. بلیت برنده باید توپ‌های درست را بدون توجه به ترتیب خروج از سطل نمایش دهد. چند بلیت قابل تمایز وجود دارد؟

۳۲. با استفاده از استقرای ریاضی قضیه دوجمله‌ای را که در بخش الف ـ ۷ آمده است اثبات کنید.

۳۳. اعتبار هویت زیر را مشخص کنید:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

۳۴. فرض کنید k_1 شیء از نوع اول، k_2 شیء از نوع دوم و k_m شیء از نوع mاُم داریم که $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n$. نشان دهید تعداد جایگشت‌های قابل تمایز از n شیء برابر است با:

$$\frac{n!}{(k_1!)\,(k_2!)\cdots(k_m!)}$$

۳۵. فرض کنید f(n, m) تعداد راه‌های n شیء یکسان در m مجموعه است که ترتیب اعضای مجموعه مهم نیست. به‌عنوان مثال، اگر $n = 4$ و $m = 2$ و مجموعه‌ای از اشیا برابر با $\{A, A, A, A\}$ باشد، توزیع‌های ممکن عبارت‌اند از:

۱. $\{A, A, A, A\}, \varnothing$

۲. $\{A, A, A\}, \{A\}$

۳. $\{A, A\}$, $\{A, A\}$

۴. $\{A\}$, $\{A, A, A\}$

۵. $\varnothing$, $\{A, A, A, A\}$

می‌بینیم که $f(4, 2) = 5$. نشان دهید، به‌طورکلی داریم:

$$f(n, m) = \binom{n+m-1}{m-1}$$

راهنمایی: توجه کنید که مجموعه‌ای از تمام این توزیع‌ها شامل تمام توزیع‌هایی است که n عدد A در محل اول آن‌ها قرار دارد، تمام توزیع‌هایی که (n - 1) عدد A در محل اول و ... و تمام توزیع‌هایی است که 0 عدد A در محل اول دارند. از استقرا بر روی m استفاده کنید.

۳۶. اعتبار هویت زیر را نشان دهید:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

بخش الف ـ ۸

۳۷. فرض کنید مسابقه تمرین ۳۰ را دادیم. فرض کنید تمام بلیت‌های ممکن چاپ شدند و تمام بلیت‌ها متمایزاند:

(الف) اگر یک بلیت خریداری شود، احتمال برنده‌شدن را مشخص کنید.

(ب) اگر ۷ بلیط خریداری شود، احتمال برنده‌شدن را مشخص کنید.

۳۸. فرض کنید یک دست پوکر (پنج کارت) از یک بسته کارت معمولی (۵۲کارت) انتخاب می‌شوند:

(الف) احتمال این‌که این دست شامل چهار آس باشد را محاسبه کنید.

(ب) احتمال این‌که یک دست شامل چهار کارت از نوع باشد را محاسبه کنید.

۳۹. فرض کنید یک تاس سالم باید بچرخد (احتمال هر وجه $\frac{1}{6}$ است). بازیکن به تعداد شماره‌هایی که ظاهر می‌شود، دلار دریافت می‌کند، ولی برای شماره‌های ۵ و ۶ به‌ترتیب ۵ یا ۶ دلار از دست می‌دهد.

(الف) مقدار مورد انتظار میزان پولی را که بازیکن دریافت می‌کند یا از دست می‌دهد، محاسبه کنید.

(ب) اگر بازی ۱۰۰ بار تکرار شود، حداکثر پولی که بازیکن از دست می‌دهد چقدر است، حداکثر پولی که بازیکن برنده می‌شود چقدر است؟ مقدار پولی که بازیکن انتظار دارد ببازد یا برنده شود چقدر است؟

۴۰. فرض کنید عنصری را در لیستی از n عنصر متمایز جست‌وجو می‌کنیم. میانگین تعداد مقایسه‌های لازم در جست‌وجوی ترتیبی (جست‌وجوی خطی) چند است؟

۴۱. برای عمل حذف عنصری از آرایه n عنصری، تعداد جابه‌جایی‌های مورد انتظار چقدر است؟