حل تمرینات مهم کتاب روش های محاسبات عددی

مولفین : ربانی – اکبری

حل تمرینات فصل اول

1- بنابر توضیحات مثال 18 – 1 عبارات $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ را ترجیح می دهیم.

2- الف.

با توجه به حدود انتگرال داده شده $0 \le x \le 1$ است و در نتیجه $0 \le x^n \le 1$ می باشد.

$$-1 \le x-1 \le 0 \quad , \quad \frac{1}{e} \le e^{x-1} \le 1$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در x^n خواهیم داشت:

$$\frac{x^n}{e} \le x^n e^{x-1} \le x^n$$

با انتگرال گیری از 0 تا 1 از رابطه اخیر داریم :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{e} dx \le \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \le \int_0^1 x^n dx$$

بنابراین :

$$\frac{1}{e(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$$

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e(n+1)} \le \lim_{n \to +\infty} I_n \le \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

طبق قضیه فشردگی $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ می باشد.

2- ب.

با روش جزء به جزء برای انتگرال I_n داده شده خواهیم داشت :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

$$= [x^n e^{x-1}]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx$$

$$= 1 - n\, I_{n-1}$$

2- ج.

$I_1 = \int_0^1 x^1 e^{x-1} dx = [xe^{x-1}]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - [e^{x-1}]_0^1 = \frac{1}{e}$

$I_1 \approx 0.367879$, (6D)

$I_2 \approx 1 - 2I_1$ = 1 – 2 (0.367879) = 0.264242

...

$I_9 \approx 1 - 9I_8$ = - 0.06848

مشاهده می گردد که با توجه به $I_n \geq 0$ در قسمت الف نتیجه به دست آمده برای I_9 غیرقابل قبول است. لذا باید در محاسبات خطایی وارد شده باشد.

در تقریب $I_1 = \frac{1}{e}$ به صورت عدد 0.367879 مقدار خطای گرد کردن $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ می باشد و این خطا در ادامه روند محاسبات $I_2, I_3, ..., I_9$ افزایش می یابد زیرا:

$\hat{I}_2 = 1 - 2\hat{I}_1 = 1 - 2(I_1 + \varepsilon) \Rightarrow 2\varepsilon = 2!\varepsilon$

$\hat{I}_3 = 1 - 3\hat{I}_2 = 1 - 3(I_2 + 2!\varepsilon) \Rightarrow 3 \times 2\varepsilon = 3!\varepsilon$

...

$\hat{I}_9 = 1 - 9\hat{I}_8 = 1 - 9(I_8 + 8!\varepsilon) \Rightarrow 9 \times 8!\varepsilon = 9!\varepsilon$

مقادیر $2!\varepsilon$ و $9!\varepsilon$ مقدار خطای ایجاد شده می باشند که به علت بزرگ بودن $9!\varepsilon$ خطا در محاسبه I_9 به جواب نادرستی رسیده ایم .

در مواردی که با ورود خطای جزئی در مسئله باعث داشتن خطای بزرگ در خروجی مسئله می گردد،مسئله را ناپایدار می نامند.

2- د. باید به نحوی I_n ها محاسبه شوند که مقدار خطا در هر مرحله کاهش یابد، برای این منظور به صورت زیر عمل می کنیم :

$I_n = 1 - nI_{n-1}$

$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}$

از طرفی $\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ است. لذا برای n های بزرگ $I_n \approx 0$ می باشد. ما در این مسئله $I_{16} \approx 0$ اختیار می کنیم که از روی آن $I_9, ..., I_{14}, I_{15}$ قابل محاسبه می باشند.

$I_{16} \approx 0$

$I_{15} = \frac{1 - I_{16}}{16} = \frac{1 - 0}{16} \approx 0.0625$

$I_{14} = \frac{1 - I_{15}}{15} = \frac{1}{16} \approx 0.0625$

.

.

.

$I_9 = 0.091612 \quad , (6D)$

بررسی خطا در روند بالا:

$$\frac{1}{e\times 17}\le I_{16}\le\frac{1}{17}\rightarrow\varepsilon\le\frac{1}{17}$$

$$\widehat{I}_{15}=\frac{1-(\widehat{I}_{16}-\varepsilon)}{16}=\frac{I-\widehat{I}_{16}}{16}-\frac{\varepsilon}{16}$$

$$\widehat{I}_{14}=\frac{1-(\widehat{I}_{15}+\frac{\varepsilon}{16})}{15}=\frac{1-\widehat{I}_{15}}{15}-\frac{\varepsilon}{15\times 16}$$

.

.

$$\widehat{I}_{9}=\frac{1-(\widehat{I}_{10}+\frac{\varepsilon}{16\times 15\times\ldots\times 11})}{10}\rightarrow\frac{\varepsilon}{16\times 15\times\ldots\times 10}=\frac{1}{17\times 16\times\ldots\times 10}$$

مشاهده می گردد که میزان خطای I_9 برابر $\frac{1}{17\times 16\times\ldots\times 10}=1.02\times 10^{-9}$ است که عددی بسیار کوچک است. که در محاسبات تا (6D) صفر در نظر گرفته می شود.

4- هر دو مقدار برابر هستند ولی در محاسبه دومی تعداد ضرب کمتر است، لذا آنرا ترجیح می دهیم.

$F(2.73) = (2.73)^3 - 5(2.73)^2 + 6\ (2.73) + 0.55 = 0.011928$

$F(2.37) = [(2.37-5)\ 2.37+6]\ (2.37) + 0.55 = 0.011928$

5-بسط مک لوران تابع $\sin x$ را می نویسیم.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots.$$

$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^4(x)=\sin x,\ldots\ldots.$$

با استفاده از روابط اخیر داریم:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{15}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{12}\approx 0.26179(rad)$$

چون $f^{(n+1)}(\varepsilon)$ به صورت $\sin\varepsilon$ یا $\cos\varepsilon$ و قدر مطلق سینوس یا کسینوس کمتر یا مساوی یک می باشد بنابراین خواهیم داشت.

$$\left|R_n\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(0.26179)^{n+1}}{(n+1)!}<10^{-4}$$

بنابراین n=5 می باشد.

پس برای محاسبه $\sin 15^{\circ}$ یا $\sin(0.26179)$ باید بسط مک لوران را تاجمله پنجم در نظر بگیریم.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\sin 15^\circ \approx (0.26179) - \frac{(0.26179)^3}{3!} + \frac{(0.26179)^5}{5!} = 0.25881, (5D)$$

7-

$$e(\sqrt{5} \times \sqrt{3}) \le (2.23607 + 1.73205)5 \times 10^{-6} = 0.0000198706 \approx 0.00002$$

9- فرض می کنیم $b_{n+1}<5$ باشد :

$$\begin{array}{l} A = a_1 a_2 ....a_m .b_1 b_2 ....b_n b_{n+1} ...... \\ \underline{a = a_1 a_2 ....a_m .b_1 b_2 ....b_n} \\ A - a = 0....0.0....0 b_{n+1} b_{n+2} .... \\ \left| A - a \right| = \left| b_{n+1} . b_{n+2} \right| \times 10^{-(n+1)} \le 5 \times 10^{-(n+1)} \end{array}$$

اگر $b_{n+1} \ge 5$ باشد خواهیم داشت.

$$\begin{array}{l} A = a_1 a_2 ....a_m .b_1 b_2 ....b_n .b_{n+1} .... \\ \underline{a = a_1 a_2 ....a_m .b_1 b_2 ....(b_n + 1)0....} \\ a - A = 00..........0.00..........\alpha \times \beta \end{array}$$

چون $b_{n+1} \ge 5$ است بنابراین $\alpha < 5$ می باشد .

$$\left| A - a \right| = \left| a - A \right| = \left| \alpha . \beta \times 10^{-(n+1)} \right| \le 5 \times 10^{-(n+1)}$$

پس در هر حالت حداکثر خطای گرد کردن تا n رقم اعشار برابر $5 \times 10^{-(n+1)}$ است.

10-

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$\left| R_n \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{e^{\varepsilon} (\frac{2}{3})^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le \frac{e^1 (\frac{2}{3})^{n+1}}{(n+1)!}, \varepsilon \in (0, \frac{2}{3}) \le \frac{3 \times (\frac{2}{3})^{n+1}}{(n+1)!} \le E$$

برای معرفی E ، چون 2<e<3 است لذا $1.58 < 2^{\frac{2}{3}} < 3^{\frac{2}{3}} < 2.08$ می باشد یعنی $e^{\frac{2}{3}} \in (1.58, 2.08)$ و بسط اعشاری $e^{\frac{2}{3}}$ بصورت زیر بیان می گردد.

$$e^{\frac{2}{3}} = 1\times10^0 + \ldots$$
$$E = |A-a| \le 5\times10^{m-9} = 5\times10^{0-4}$$

با قرار دادن E در رابطه فوق مقدار n=5 بدست می آید.

یعنی برای محاسبه $e^{\frac{2}{3}}$ باید بسط e^x را تا در جمله پنجم در نظر بگیریم .

$$e^{\frac{2}{3}} = 1 + (\frac{2}{3}) + \frac{(\frac{2}{3})^2}{2!} + \frac{(\frac{2}{3})^3}{3!} + \frac{(\frac{2}{3})^4}{4!} + \frac{(\frac{2}{3})^5}{5!} \approx 1.9477 \approx 1.948$$

پس مقدار $e^{\frac{2}{3}}$ تا 4 رقم با معنای درست برابر 1.948 است.

11- ابتدا عدد مورد نظر را به مبنای 10 می آوریم، سپس به مبنای 2 تبدیل می کنیم.

$(0.123403)_5=1\times5^{-1}+2\times5^{-2}+3\times5^{-3}+4\times5^{-4}+0+3\times5^{-6}=0.310592$

$$A_1 = 0.310592$$
$$b_1 = [2A_1] = [0.621184] = 0 \rightarrow A_2 = 2A_1 - b_1 = 0.621184$$
$$b_2 = [2A_2] = [1.24368] = 1 \rightarrow A_3 = 2A_2 - b_2 = 0.24368$$
.

.

.

$$b_6 = [2A_6] = [1.87788] = 1 \rightarrow A_6 = 2A_6 - b_6 = 0.87788$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$(0.123403)_5=(0.310592)_{10}=(0.010011)_2$

حل تمرینات فصل دوم

1- معادله $x^3-7=0$ را با روش نیوتن حل می کنیم که x_0 را از روش نصف کردن تا یک گام محاسبه می نماییم.

$F(1.5)=(1.5)^3-7=-3.625<0$
$F(2)=(2)^3-7=1 \ \ >0$

بنابراین ریشه در فاصله (2 , 1.5) قرار دارد.

$$x_0 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3-7}{3x_0^2} = 1.75 - \frac{(1.75)^3-7}{3(1.75)^2} = 1.928571$$

چون $|f(x_1)| = |f(1.9285571)| < 5\times10^{-4}$ نیست پس باید روند را ادامه دهیم، که به خواننده واگذار می شود.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(1.928571)}{3(1.928571)^2} = \ldots\ldots.$$

2- ابتدا باید g(x) ای را معرفی کنیم که در شرایط قضیه 3-2 صدق کند بنابراین داریم:

$$\ln x=-x, x=e^{-x}\rightarrow g(x)=e^{-x}$$
$$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}-\ln 3<0$$
$$f(1)=\ln(1)+1=1$$

بنابراین حدود تقریبی ریشه $(\frac{1}{3},1)$ می باشد و دو شرط قضیه بصورت زیر برقرار می باشند.

$$\frac{1}{3}<x<1, \frac{1}{3}<\frac{1}{e}<e^{-x}<\frac{1}{\sqrt[3]{e}}<1$$
$$\left|g'(x)\right|=e^{-x}<\frac{1}{\sqrt[3]{e}}=L<1; x\in(\frac{1}{3},1)$$

برای بدست آوردن جواب تقریبی معادله با فرض $g(x)=e^{-x}$ جملات دنباله $x_{n+1}=e^{-x_n}$ را محاسبه می نماییم به علت نسبتاً بزرگ بودن 1 سرعت همگرایی کم است.

$$x_0=0.5, x_{n+1}=e^{-x_n}, \varepsilon=10^{-2}$$
$$x_1=e^{-0.5}=\frac{1}{\sqrt{e}}=0.606531$$
$$x_2=e^{-0.0606531}\approx 0.545239$$
.
.
.
$$x_7=0.568438$$

چون $\left|f(x_7)\right|=\left|f(0.568438)\right|=0.0035749<10^{-2}$ است لذا x_1 جواب تقریبی مورد نظر می باشد

طبق مثال 13-2 به روش تکرار ساده $x_9=0.7388$ بدست آمده است با ادامه روند و با فرض $\varepsilon=5\times10^{-6}$ می توان به جواب معادله دست یافت.

حدود تقریبی ریشه (0.5,1) می باشد لذا با روش نیوتن $x_0=0.75$ در در نظر بگیرید. در روش وتری $x_0=0.75$ و $x_1=0.615$ اختیار کنید.

4- فرض می کنیم ریشه مثبت معادله مورد نظر باشد

$$x^2+x-1=0, x=1-x^2$$
$$g_1(x)=1-x^2$$

بنابراین:

$$x^2+x-1=0, x^2=1-x$$
$$g_2(x)=\sqrt{1-x}$$
$$x^2+x-1=0, x(x+1)=1, x=\frac{1}{1+x}$$
$$g_3(x)=\frac{1}{1+x}$$
$$x^2+x-1=0, 2x^2-x^2+x-1=0, x(2x+1)=1+x^2$$
$$x=\frac{1+x^2}{2x+1}$$
$$g_4(x)=\frac{1+x^2}{2X+1}$$

یعنی می توان صورت های مختلفی از $g(x)$ را ارائه نمود.
برای حل معادله $x^2+X-1=0$ ابتدا حدود تقریبی ریشه معادله را بدست می آوریم.

F(0)=-1 , F(1)=1

F(0)F(1)<0

پس حدود تقریبی ریشه (0,1) می باشد.

$$|g'(x)|=2|x| \not< 1, x\in(0,1)$$

بنابراین $g(x)$ قابل قبول نیست.

$$g_2(x)=\sqrt{1-x}$$
$$|g_2'(x)|=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

اگر x نزدیک عدد یک باشد $g_2'(x)$ عدد بزرگی می شود. ولی با تنگ تر کردن حدود تقریبی ریشه به عنوان نمونه $x\in[0.51,0.7]$ آنگاه :

$$|g_2'(x)|=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\le 0.91<1$$

یعنی سرعت همگرایی روش کم است زیرا L=0.91 عددی نزدیک به 1 می باشد.

$$g_3(x)=\frac{1}{1+x}$$
$$0.51\le x\le 0.7, 0.51<(1.51)^2\le(1.6)^2<0.7$$
$$|g_3'(x)|=\frac{1}{(x+1)^2}\le\frac{1}{(1.51)^2}=0.44<1$$

چون دو شرط قضیه 3-2 برقرار است، لذا $g_3(x)$ مناسب می باشد و سرعت همگرائی به علت کوچک بودن L=0.44 نسبتاً زیاد است.

$$|g_4'(x)|=\left|\frac{1}{2}(1-\frac{5}{4x^2+4x+1}\right|\le L<1$$

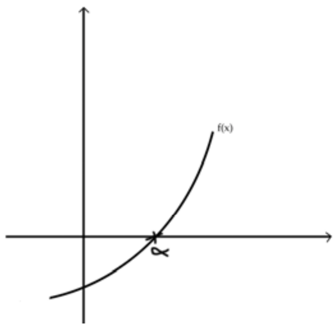
با در نظر گرفتن حدود تقریبی ریشه (0.51,0.7) مقدار L عدد بسیار کوچک است لذا سرعت همگرائی زیاد است.

$$f(x) = x^2 - (1-x)^5$$
$$f'(x) = 2x + 5(1-x)^4$$

اگر $x \geq 0$ باشد، $f'(x) > 0$ می باشد و تابع $f(x)$ صعودی است.

$$f(x) = x^2 - (1-x)^5 = -1 + 5x - 9x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5$$

اگر x<0 باشد، $f(x) < 0$ می شود و تابع $f(x)$ دربازه $(-\infty,0)$ صعودی است.
لذا فقط یک ریشه مثبت دارد.



محاسبه ریشه معادله فوق با روش وتری:

$$f(0)\,f(1) < 0$$

پس حدود تقریبی ریشه (0,1) است، برای بدست آوردن نقطه شروع در روش وتری ابتدا چندگام از روش نصف کردن، مسئله را حل می کنیم که در این سئوال فقط تا دو گام از روش نصف کردن استفاده می کنیم.

$$x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5,\ f(0)\,f(0.5) < 0$$
$$x_1 = \frac{0+0.5}{2} = 0.25$$
$$x_2 = 0.25 - \frac{f(0.25)(0.25-0.5)}{f(0.25) - f(0.5)} = \ldots$$

معرفی کران بالای خطا:

چون در مسئله تا دو رقم با معنای درست مورد نظر است لذا به صورت زیر ε را معرفی می کنیم:

$$\alpha \in (0,1) \rightarrow \alpha = 0.a_m a_{m-1} \ldots = a_m \times 10^{-1} + a_{m-1} \times 10^{-2} + \ldots..$$

پس مقدار m=-1 و n=2 می باشد« برای بررسی بیشتر به 1-6-1 مراجعه کنید» و مقدار ε برابر است با:

$$\varepsilon = 5 \times 10^{m-n} = 5 \times 10^{-1-2} = 5 \times 10^{-3}$$

لذا دستور توقف در روند حل مسئله فوق به صورت $\left|f(x_n)\right| < 5\times10^{-3}$ می باشد.

-8

$$f(x) = 3xe^{x} - 1$$
$$f(0)\,f(1) = (-)(3e-1) < 0$$

سپس حدود تقریبی ریشه معادله (1,0) می باشد.

روش تکرار ساده:

$$3xe^{-x} = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}e^{-x}$$

تابع $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{3}$ در دو شرط قضیه 3-2 صدق می کند «تحقیق کنید!»

$$x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5$$
$$x_1 = g(x_0) = g(0.5) = \frac{1}{3}e^{-0.5} = 0.2022$$
$$x_2 = g(x_1) = g(0.2022) = \frac{1}{3}e^{-0.2022} = 0.2723$$

.

.

.

$$x_8 = 0.2576$$

روش نیوتن:

بعنوان نمونه با $x_0 = 0.5$ در روش نیوتن x_1 را بدست می آوریم. ادامه روند بطور مشابه قابل اجراست.

$$x_1 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} = 0.5 - \frac{3(0.5)e^{0.5} - 1}{3e^{0.5}(1+0.5)} = 0.3015$$

9- الف.

$$e^{x} = 3x^{2}, x = \pm\sqrt{\frac{e^{x}}{3}}, g_1(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{3}}$$

با انتخاب $g_1(x)$ بصورت فوق دو شرط قضیه 3-2 را روی آن اعمال می کنیم.

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, e^{0} \le e\dfrac{x}{2} \le e^{\frac{1}{2}} \\ 0 \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \le \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{3}} \le \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \le 1 \end{cases}$$

$$\left|g_1'(x)\right| = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{3}} \le \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{3}} \le 0.48 = L < 1$$

بنابراین $g_1(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{3}}$ در فاصله (0,1) مناسب است. ولی در فاصله (3,4) مناسب نیست زیرا:

$$|g_1'(x)|=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{3}}\le\frac{e^{\frac{4}{2}}}{2\sqrt{3}}=\frac{e^2}{2\sqrt{3}}\neq 1$$

9- ب.

حال به گونه دیگری $g(x)$ را ایجاد می کنیم که در بازه (3,4) در قضیه 3-2 صدق نماید.

$$e^x=3x^2, x=Lne^x=Ln(3x^2)=Ln3+2Lnx$$

بنابراین:

$$g_2(x)=Ln3+2Lnx$$

$$3\le x\le 4, 3\le Ln3+2Ln3\le Ln3+2Lnx\le Ln3+2Ln4\le 4$$

$$|g_2'(x)|=\frac{2}{x}\le\frac{2}{3}=L<1$$

محاسبه جواب مسئله:

$$x_0=0.5$$

$$x_1=g_1(0.5)=\frac{e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}}=0.7413$$

$$x_2=0.8364$$

.

.

.

$$x_7=0.9089$$

$$x_8=0.9094$$

چون $|x_8-x_7|=0.0008<10^{-3}$ است لذا x_8 جواب می باشد.

در بازه (3,4) توسط $g_2(x)$ با فرض $x_0=3.5$ می توان در x_9 به جواب رسید.

11-

$$f(0)=\cos 0-1$$

$$f'(0)=-\sin 0=0$$

$$f''(0)=-\cos 0=1\neq 0$$

بنابراین ریشه تکراری از مرتبه دو است.

12- چون α ریشه تکراری از مرتبه m است پس $f(x)$ را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$f(x)=(x-\alpha)^m h(x)$$

که در آن $h(\alpha)\neq 0$ می باشد.

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{(x_n-\alpha)^m h(x_n)}{m(x_n-\alpha)^{m-1}h(x_n)+h'(x_n)(x_n-\alpha)^m} = g(x_n)$$

$$g(x) = x - m\frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}h(x)+h'(x)(x-\alpha)^m}$$

$$= x - \frac{m(x-\alpha)h(x)}{mh(x)+h'(x)(x-\alpha)}$$

$$g'(\alpha) = 0$$

بنابراین مرتبه همگرایی حداقل دو است.

13- د.

ابتدا $p(x)=e^x$ را تا جمله دهم بسط مک لوران می دهیم سپس تقسیمات هورنر روی آن قابل اجراست.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{10}}{10!}$$

-15

ضرایب $p(x)$	1	-3	3	-3	-8	-30
$S_0=-1$			-1	5	-12	22
$R_0=-2$		-2	10	-24	44	-48
ضرایب $Q(x)$	1	-5	12	-22	$24=b_1$	$-56=b_0$
$S_0=-1$			-1	7	-25	
$R_0=-2$		-2	14	-50	130	
	1	-7	$25=c_3$	$-65=c_2$	$129=c_1$	

$$\begin{cases} 129\Delta r - 65\Delta s = 56 \\ -65\Delta r + 25\Delta s = -24 \end{cases}$$

$$r_1 = r_0 + \Delta r = -2 + \frac{\begin{vmatrix} 56 & -65 \\ -24 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 129 & -65 \\ -65 & 25 \end{vmatrix}} = -2 + \frac{160}{1000} = -1.84$$

$$s_1 = s_0 + \Delta s = -1 + \frac{\begin{vmatrix} 129 & 56 \\ -65 & -24 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 129 & -65 \\ -65 & 25 \end{vmatrix}} = -1 + \frac{544}{1000} = -1.544$$

در روند فوق بجای r_0 , s_0 مقادیر r_1 ,s_1 قرار می دهیم تا مقادیر r_2 ,s_2 بدست آید «تحقیق کنید»

$$\begin{cases} s_2 = -2.31 \\ r_2 = -2.79 \end{cases}$$

حل تمرینات فصل 3

2- جای سطر اول و چهارم را با یکدیگر عوض کنید تا ماتریس ضرایب اکیداً قطر غالب گردد. سپس طبق 2-3و3-3 مسئله را حل کنید.

4 - جای معادله دو و سه را عوض می کنیم تا ماتریس ضرایب اکیدا قطر غالب گردد .

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -15 \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -15 \end{cases}$$

حال با روش گاوس – سایدل و نقطه شروع $X^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ مسئله را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{11}{6} + \frac{3}{6}x_2^{(k)} - \frac{1}{6}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{-10}{6} + \frac{1}{7}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{7}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{15}{8} + \frac{2}{8}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{8}x_2^{(k+1)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = 1.83 \\ x_2^{(1)} = -1.17 \\ x_3^{(1)} = 2.19 \end{cases}$$

بنابراین: $X^{(1)} = (1.83, -1.17, 2.19)^{\mathrm{T}}$ می باشد و دستور توقف بصورت زیر بررسی میگردد.

$$\left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\|_\infty = \max\{|1.83|, |-1.17|, |2.19|\} \not< 10^{-2}$$

روند را تا برقراری دستور توقف ادامه دهید.

-7 با توجه به صورت مسئله داریم:

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+x_3^3-1=0$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+2x_3^2-2=0$$
$$f_3=(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_1^2+x_1x_3-5=0$$

ژاکوبین توابع $f_i, i=1,2,3$ را در نقطه $X^{(6)}=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ محاسبه می کنیم.

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{matrix}\right|_{(1,1,0)^{\mathrm{T}}}=\left|\begin{matrix}2x_1+x_2 & x_1 & 3x_3^2\\ 1 & 1 & 4x_3\\ 2x_2x_1+2x_1+x_3 & x_1^2 & x_1\end{matrix}\right|_{(1,1,0)^{\mathrm{T}}}=\begin{vmatrix}3&1&0\\1&1&0\\4&1&1\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&0\\4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f_1(1,1,0)\\-f_2(1,1,0)\\-f_3(1,1,0)\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&0\\4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$$

با حل دستگاه فوق مقادیر $\alpha_3=4.5,\alpha_2=-0.5,\alpha_1=0.5$ بدیت می آید و داریم:

$$\alpha=\begin{pmatrix}0.5\\-0.5\\4.5\end{pmatrix},X^{(1)}=X^{(0)}+\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5\\-0.5\\4.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5\\0.5\\4.5\end{pmatrix}$$

حل تمرین فصل 5

-2

x_1	f_i	$f[x_1,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{1+2}]$
0	1		
		1.052	
0.1	1.1052		0.5717
		1.2235	
0.3	1.3499		

$$p(x)=1+0.52(x-0)+0.5717(x-0)(x-0.1)$$
$$e^{0.2}\approx p(0.2)=1.221834$$

چون از درونیابی سر نقطه ای استفاده کرده ایم خطا بصورت زیر محاسبه می گردد.

$$E=\left|\frac{f^{(3)}(\varepsilon)}{3!}(x-0)(x-0.1)(x-0.3)\right|\leq\frac{e^{0.3}}{3!}\left|(0.2)(0.2-0.1)(0.2-0.3)\right|\approx 0.00044997$$

یعنی حداکثر خطا در محاسبه $e^{0.2}$ برابر 0.00045 می باشد که مقدار $e^{0.2}$ توسط ماشین حساب برابر عدد 1.221402758 است که با مقدار واقعی 0.00043 تفاوت دارد.

4- نقاط را به صورت زیر در نظر می گیریم و مانند مثال 12-5 عمل می نماییم.

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	0.9524	3.3333	20	3.3333	0.9524

$$h_i=1, i=0,1,2,3$$

$$f[x_0,x_1]=f[-2,-1]=\frac{3.3333-0.9524}{-1-(-2)}=2.3809$$

$$f[x_1,x_2]=f[-1.0]=16.6667$$

$$f[x_2,x_3]=f[0,1]=-16.6667$$

$$f[x_3,x_4]=f[1,2]=-2.3809$$

$$\begin{bmatrix}2(h_0+h_1) & h_1 & 0\\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2\\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]\\ f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]\\ f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]\end{bmatrix}$$

با جای گذاری مقادیر $S_0,S_4=0$ خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}14.2858\\ -33.3334\\ 14.2858\end{bmatrix}$$

در نتیجه مقادیر s_i ها به صورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{cases}s_1=s_3=10.2042\\ s_2=44.898\\ s_0=s_4=0\end{cases}$$

ضرایب d_i,c_i,b_i,a_i ها بصورت محاسبه می گردند.

$$a_i=\frac{s_{i+1}-s_i}{6h_i}=\frac{s_{i+1}-s_i}{6}, i=0.1,2,3$$

در نتیجه :

$$a_0 = 1.7007, a_1 = 5.7823, a_2 = -5.7823, a_3 = -1.7007$$

$$b_i = \frac{s_i}{2}, i = 0,1,2,3$$

در نتیجه:

$$b_0 = o, b_1 = 5.1021, b_2 = 22.449, b_3 = 5.1021$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i s_i + h_i s_{i+1}}{6}, i = 0,1,2,3$$

در نتیجه:

$$c_0 = 0.6802, c_1 = 5.7823, c_2 = 33.3334, c_3 = -5.7823$$

$$d_i = y_i, i = 0,1,2,3$$

$$d_0 = 0.9524, d_1 = 3.3333, d_2 = 20, d_3 = 3.3333$$

چندجمله ای های $g_i(x)$ به ازای i=0,1,2,3 از فرمول زیر با معلوم بودن ضرایب d_i, c_i, b_i, a_i ها قابل محاسبه است.

$$g_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

برای $-2 \le x \le -1$:

$$g_0(x) = 1.77007(x+2)^3 + (0)(x+2)^2 + 0.6802(x+2) + 0.9524$$

برای $-1 \le x \le 0$:

$$g_1(x) = 5.7823(x+1)^3 + 5.1021(x+1)^2 + 5.7823(x+1) + 3.3333$$

برای $0 \le x \le 1$:

$$g_2(x) = -5.7823x^3 + 22.449x^2 - 33.3334x + 20$$

برای $1 \le x \le 2$:

$$g_3(x) = -1.7007(x-1)^3 + 5.1021(x-1)^2 - 5.7823(x-1) + 3.3333$$

8- با توجه به خط برازش کننده با کمترین مربعات در 1-6-5 یکی از معادلات بصورت زیر می باشد.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb$$

طرفین بر n تقسیم می کنیم:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{nb}{n}$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

یعنی $(\bar{x}, \bar{y})$ در خط با کمترین مربعات صدق می کنند.

9- فرض می کنیم $\alpha_1 L_1(x)+\alpha_2 L_2(x)+.....+\alpha_n L_n(x)=0$ باشد با قرار دادن $x=x_i$ به ازای i=1,2,...,n داریم:

$$x=x_i, \alpha_1 L_1(x_i)+\alpha_2 L_2(x_i)+.....+\alpha_i L_i(x_i)+.....+\alpha_n L_n(x_i)=0$$

به علت $L_j(x_i)=0, L_i(x_i)=1$ به ازای $j\neq i$ مقدار $\alpha_i=0$ می گردد. بنابراین با تغییر i از 1 الی n همه α_i ها صفر می شوند و بنابراین $L_i(x)$ ها به ازای i=1,2,...,n مستقل خطی اند.

10-بنابر چند جمله ای درونیاب لاگرانژ بصورت زیر:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

همچنین بنابر مفهوم درونیابی $p(x_i)=f(x_i), i=0,1,....,n$ می باشد.
حال اگر $f(x)=1$ باشد آنگاه $p(X_i)=f(X_i)=1, i=0,1,...,n$
یعنی به ازای $p(x)-1=0, x_n,..., x_1, x_0$ است پس معادله $p(x)-1=0$ دارای $(n+1)$ ریشه است از طرفی :

$$p(x)=L_0(x)f(x_0)+...+L_n(x)f(x_n)$$
$$f(x)=1$$
$$p(x)-1=L_0(x)+...+L_n(x)-1$$

حداکثر از درجه n

پس $p(x)-1$ حداکثر از درجه n است ولی دارای n+1 ریشه است، بنابراین $p(x)-1\equiv 0$ است و از تساوی فوق رابطه $\sum_{i=0}^{n} L_i(x)-1\equiv 0$ برقرار می باشد.

در نتیجه :

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x)=1$$

11- از درونیابی استفاده کنید.

-14

x_1	f_i	$f[x_1, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{1+2}]$
0	3		
		0	
2	3		-0.2667
		-0.4	
2.5	2.8		

$$p(x)=3+(0)(x-1)-0.2667(x-1)(x-2)$$
$$f(1.2)\approx p(1.2)=2.957328$$

14-ج.

اگر مختصات نقاط (x_3, y_3) در درونیاب صدق کند، درونیاب تغییر نمی کند ولی اگر صدق نکند،درونیاب می تواند بهبود یابد.

17- الف.

$$s_0(x) = 4 + b_0 x + x^3$$
$$s_1(x) = 1 + b_1(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3$$
$$s_0'(x) = b_0 + 3x^2, s_0'' = (x) = 6x \to s_0''(0) = 0$$
$$s_1'(x) = b_1 + 6(x-1\_-3(x-1)^2$$
$$s_1''(x) = 6 - 6x$$
$$s_1''(0) = 6$$

ب-

$$1 = s_0(1) = 4 + b_0 + 1 \to b_0 = -4$$

ج-

$$2 = s_1(2) = 1 + b_1 + 3 - 1 \to b_1 = -1$$

ح-

$$s_0'(1) = b_0 + 3(1) = b_0 + 3 = -4 + 3 = -1$$
$$s_1'(1) = b_1 + 6(0) - 3(0) = b_1 = -1$$

بنابراین $s_0'(1) = s_1'(1) = -1$ است و بطور مشابه می توان نشان داد که $s_0''(1) = s_1''(1)$ است.

19-

اگر $f(x) = p_2(x) + E$ باشد آنگاه $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_2(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} Edx$ می باشد که در آن E جمله خطای لاگرانژ است.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int [\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f_1]dx$$

اگر $x_1 - x_0 = h$ باشند، خواهیم داشت:

$$= \int_{x_0}^{x_1} [\frac{f_0}{-h}(x-x_1) + \frac{f_1}{h}(x-x_0)]dx$$
$$= \frac{-f_0}{h} \int (x-x_1)dx + \frac{f_1}{h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)dx$$

با تغییر متغیر $x = x_0 + th$ داریم:

$$= \frac{-f_0}{h}\int_0^1 h(t-1)hdt + \frac{f_1}{h}\int_0^1 thdt = -hf_0\int (t-1)dt + hf_1\int_0^1 tdt$$
$$= -hf_0(-\frac{1}{2}) + hf_1(\frac{1}{2}) = \frac{h}{2}[f_0 + f_1]$$

بنابراین:

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2} =$$ مقدار دقیق

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}, I = \frac{1}{3}$$ مقدار دقیق

یعنی روش درونیاب دو نقطه ای برای چندجمله ای از درجه یک دقیق است.

20- از نتیجه مسئله (19) برای محاسبه $\int_2^3 x^2\cos(\frac{\pi}{2}x)dx$ استفاده کنید.

$$\int_2^3 x^2\cos(\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{1}{2}[f(2)+f(3)]$$
$$= \frac{1}{2}[(4)\cos\pi + 9\cos\frac{3\pi}{2}]$$
$$= \frac{1}{2}[-4+9(0)] = -2$$

حل تمرین فصل 6:

3- ابتدا در روش ذوزنقه مقدار h را طوری بدست می آوریم که خطا کمتر از 10^{-2} باشد.

$$|E| = \frac{h^2}{12}(b-a)|f''(\varepsilon)| < 10^{-2}$$
$$f(x) = 5 + 3\sin x$$
$$f''(x) = -3\sin x, |f''(\varepsilon)| = |-3\sin\varepsilon| \le 3, \varepsilon \in (0,\pi)$$
$$|E| = \frac{h^2}{12}(\pi - 0)|f''(\varepsilon)| \le \frac{h^2\pi}{12}\times 3 < 10^{-2}$$

بنابراین:

$$h < 0.11$$
$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{n} \to 0.11 = \frac{\pi}{n}, n = 28.56$$

در نتیجه n=29 اختیار می گردد و مقدار $h = \frac{\pi}{29}$ بدست می آید.

$$I = \frac{\pi}{58}[f(0) + 2(f(\frac{\pi}{29}) + ... + f(\frac{28\pi}{29})) + f(\pi)]$$

برای روش سیمپسون مقدار h بصورت زیر محاسبه می گردد.

$$|E| = \frac{h^4}{180}(\pi - 0)\left|f^4(\varepsilon)\right| = \frac{h^4\pi}{60} < 10^{-2}$$

$$h \approx 0.66, n = \frac{\pi}{0.66} \approx 4.76 \rightarrow n = 6, h = \frac{\pi}{6}$$

در روش سیمپسون مقدار n باید عدد زوج باشد بدین منظور n=6 اختیار شده است.

$$I = \frac{\pi}{18}[f(0) + 2(f(\frac{\pi}{6}) + f(\frac{3\pi}{6})) + 4(f(\frac{2\pi}{6}) + f(\frac{4\pi}{6}) + f(\pi)]$$

در روش رامبرگ ابتدا به کممک روش ذوزنقه با h_iهای متفاوت مقدار انتگرال را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$h_0 = \pi, T_{00} = \frac{\pi}{2}[f(0) + f(\pi)] = 5\pi$$

$$h_1 = \frac{\pi}{2}, T_{01} = \frac{\pi}{4}[f(0) + 2f(\frac{\pi}{2}) + f(\pi)] = \frac{13\pi}{2}$$

$$h_2 = \frac{\pi}{4}, T_{02} = \frac{\pi}{8}[f(0) + 2(f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{2\pi}{4}) + f(\frac{3\pi}{4})) + f(\pi)] = \frac{(23+3\sqrt{2})\pi}{4}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$T_{00} = 5\pi$$

$$T_{01} = \frac{13\pi}{2} \qquad T_{10} = \frac{4T_{01} - T_{00}}{(4-1)} = T\pi$$

$$T_{02} = \frac{(23+3\sqrt{2})\pi}{4} \quad T_{11} = \frac{4T_{02} - T_{01}}{(4-1)} = \frac{(11+2\sqrt{2})\pi}{2} \quad T_{20} = \frac{4^2T_{11} - T_{10}}{(4^2-1)} = \frac{(18+16\sqrt{2})\pi}{15}$$

دستور توقف را بصورت زیر عمل می کنیم:

$$|T_{10} - T_{00}| = |7\pi - 5\pi| = 2\pi \nless 10^{-2}$$

در روند فوق چون به ازای T_{01},T_{00} تفاوت بین T_{00},T_{10} از 10^{-2} کمتر نشد لذا T_{02} نیز وارد محاسبات شده است.

$$|T_{20} - T_{10}| = \left|\frac{(18+16\sqrt{2})\pi}{15} - 7\pi\right| \nless 10^{-2}$$

بنابراین باید $h_3 = \frac{\pi}{8}$ اختیار گردد و با محاسبه T_{03} یک سطر به محاسبات فوق افزوده شود و روند تا جایی ادامه می یابد که در مرحله pام دستور توقف بصورت $\left|T_{(p+1)^0} - T_{p0}\right| < 10^{-2}$ برقرار گردد.

8- با توجه به جدول داده شده برای $\sin x$ به ازای $x \in [0.800, 1.000]$ و فرمول نقطه میانی برای محاسبه مشتق به صورت زیر:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0+h)-f(x_0-h)\right]-\frac{h^2}{6}f'''(\varepsilon)$$

برای نمونه h=0.001 اختیار می کنیم بنابراین برای محاسبه $f'(0.900)$ باید از دو نقطه بعد و قبل در جدول با فاصله 0.001 از عدد 0.900 استفاده کنیم یعنی :

$$f'(0.900)=\frac{1}{2(0.001)}\left[f(0.901)-f(0.899)\right]=0.62500$$

بطور مشابه به جدول داده زیر می رسیم:

h	0.001	0.002	0.005	0.010	0.020	0.050	1.000
$f'(0.900)$	0.62500	0.62250	0.62200	0.62150	0.62150	0.52140	0.62053

با توجه به انباشتگی اعداد بین 0.62200 الی 0.62140 مقدار h بهینه بین مقدار 0.005 الی 0.050 قرار دارد که می تواند به صورت میانگین دو عدد 0.005 و 0.050 در نظر گرفته شود. یعنی $h\approx 0.028$ می یاشد.

محاسبه h بهینه از نظر تئوری خطای کلی روش نقطه میانی که در 3-1-6 توسط رابطه (15) معرفی شده است، عمل می کنیم.

$$e(h)=\frac{\varepsilon}{h}+\frac{h^2}{6}\mu,\mu=\max\left|f'''(\varepsilon_1)\right|=\max\left|\cos\varepsilon_1\right|=0.69671$$
$$0.800\le\varepsilon_1\le 1.000$$

چون ارقام داده شده در جدول برای $\sin x$ تا 5 رقم اعشار گرد شده اند، بنابراین $\varepsilon=5\times10^{-6}$ می باشد. با مشتق گیری از e(h) خواهیم داشت:

$$e'(h)=0\rightarrow h=\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{\mu}}=\sqrt[3]{\frac{3\times5\times10^{-6}}{0.69671}}\approx 0.028$$

یعنی به ازای h=0.028 بهترین تقریب از نظرخطای گرد کردن و خطای برشی برای محاسبه $f'(0.900)$ بدست می آید.

9- الف. چند جمله ای های $x^3,x^2,x,1$ را به جای $f(x)$ جای گذاری می کنیم اگر دو طرف تساوی با یکدیگر برابر شدند رابطه داده شده برای انتگرال گیری برای چندجمله ای های تا درجه سوم دقیق می باشد، بدین منظور داریم.

$$\int_0^h (1)dx = \frac{h}{2}[1+1] + \frac{h^2}{12}(0-0) \rightarrow h = h$$
$$\int_0^h xdx = \frac{h}{2}[0+h] + \frac{h^2}{12}(1-1) \rightarrow \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2}$$
$$\int_0^h x^2dx = \frac{h}{2}\left[0+h^2\right] + \frac{h^2}{12}(0-2h) \rightarrow \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{3}$$
$$\int_0^h x^3dx = \frac{h}{2}\left[0+h^3\right] + \frac{h^2}{12}(0-3h^2) \rightarrow \frac{h^4}{4} = \frac{h^4}{4}$$

9-ب.

$$\int_0^{nh} f(x)dx = \int_0^h f(x)dx + \int_n^{2h} f(x)dx + \ldots\ldots + \int_{(n-1)h}^{nh} f(x)dx$$
$$= \frac{h}{2}\left[f(0) + 2(f(h) + f(2h) + \ldots.. + f(n-1)h) + f(nh)\right]$$
$$+ \frac{h^2}{12}\left[(f'(0) - f'(h) + (f'(h) - f'(2h)) + \ldots. + (f'(n-1)h - f'(nh)\right]$$
$$= \frac{h}{2}\left[f(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(kh) + f(nh)\right] + \frac{h^2}{12}(f'(0) - f'(nh))$$

11-بسط یک جمله بیشتر در روابط (8) و (9) در 1-1-6 خواهیم داشت.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\varepsilon_1)$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f'''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\varepsilon_2)$$

بطوریکه $\varepsilon_1 \in (x_0, x_0+h)$ و $\varepsilon_2 \in (x_0-h, x_0)$ می باشند با جمع روابط فوق داریم:

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{f^{(4)}(\varepsilon_1) + f^{(4)}(\varepsilon_2)}{2}\right) \times 2$$

با توجه به پیوستگی $f^4(x)$ روی $[\varepsilon_2, \varepsilon_1]$ و قضیه مقدار میانی خواهیم داشت.

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)\right] - \frac{h^4}{12}f^{(4)}(\varepsilon), \varepsilon \in (\varepsilon_2, \varepsilon_1)$$
$$f''(0.5) = \frac{1}{(0.5)^2}\left[f(0.5-0.5) - 2f(0.5) + f(0.5+0.5)\right] = -1$$

x_i	f_i	$f[x_1, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{1+2}]$

1	1.6829420		
		2.258935	
1.04	1.7132994		0.269417
		2.2751	
1.06	1.8188014		

$$p(x) = 1.6829420 + 2.258935(x-1) + 0.269417(x-1)(x-1.04)$$
$$p(1.05) = 1.796023$$

محاسبه $f''(1.05)$:

$$f''(1.05) = \frac{1}{(0.01)^2}\left[f(1.04) - 2f(1.05) + f(1.06)\right] = 0.548$$

15 ب-

خطای برش= $hT = f'(x_i) - \frac{1}{2h}\left[4f(x_i+h) - f(x_i+2h) - 3f(x_i)\right]$

$$= f'(x_i) - \frac{1}{2h}[4f(x_i) + 4hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{4h^3}{3!}f'''(x_i)$$
$$-(f(x_i) + 2hf(x_i) + \frac{(2h^2)}{2!}f''(x_i) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x_i)) - 3f(x_i)]$$
$$= (0)f(x_i) + (0)f'(x_i) + (0)f''(x_i) + \frac{h^2}{3}f'''(x_i)$$

حل تمرین فصل 7

-4

$$\frac{dI}{dt} = (0.3)\frac{d^2}{dt^2}[e^{-0.06\pi t}\sin(2t-\pi) + \frac{1}{1.4}\frac{d}{dt}(e^{-0.06\pi t}\sin(2t-\pi) + \frac{1}{1.7}(e^{0.06\pi t}\sin(2t-\pi)$$
$$I' = e^{-0.06\pi t}[(0.0008\pi^2 - \frac{3}{70}\pi - \frac{104}{107})\sin(2t-\pi) + (\frac{10}{6} - \frac{72\pi}{100})\cos(2t-\pi)$$

طبق روش اویلر داریم:

$$I_{i+1} = I_i + hI_i'$$
$$I(0.1) \approx I_1 = I_0 + 0.1I_0' = 1 + 0.1e^0[0 + (\frac{10}{6} - \frac{72\pi}{100})\cos(-\pi)] = 0.91665$$

-10 از فرمول (21) و (22) در 1-7-7 استفاده می کنیم.

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}$$
$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}$$

با قرار دادن دو فرمول فوق در مسئله داده شده و فرض $y_i \approx y(x_i)$ به رابطه زیر می رسیم.

$$\frac{1}{h^2}[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] + \frac{1}{2h}[y_{i+1} - y_{i-1}] + x_i y_i = 2$$

با h=0.1 نقاط $x_{10} = 1, \ldots, x_1 = 0.1, x_0 = 0$ بدست می آید و به ازای i=1,2,...,9 در رابطه فوق به دستگاه زیر می رسیم.

$$\frac{1}{0.01}[y_2 - 2y_1 + y_0] + \frac{1}{2(0.1)}[y_2 - y_0] + x_1 y_1 = 2$$

$$\frac{1}{0.01}[y_3 - 2y_2 + y_1] + \frac{1}{2(0.1)}[y_3 - y_1] + x_2 y_2 = 2$$

.

.

.

$$\frac{1}{0.01}[y_{10} - 2y_9 + y_8] + \frac{1}{2(0.1)}[y_{10} - y_8] + x_9 y_9 = 2$$

با توجه به اینکه $0 = y(0) \approx y_0$ و $1 = y(1) \approx y_{10}$ لذا مجهولات دستگاه فوق $y_9, \ldots, y_2, y_1$ هستند و شکل ماتریسی دستگاه فوق به صورت سه قطری می باشد.

$$\begin{bmatrix} 199.9 & 105 & \\ 95 & -199.8 & 105 \\ 95 & -199.8 & 105 \\ 95 & -199.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -93 \\ 2 \\ . \\ . \\ 2 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه فوق مقادیر y_i به ازای $1 \le i \le 9$ بدست می آید.

11- با توجه به $x(t)$ و $y(t)$ داده شده داریم:

$$\frac{dx}{dt} = 2e^t + e^t + te^t = (3+t)e^t$$

$$3x(t) - y(t) = 6e^t + 3te^t - 3e^t - 2te^t = (3+t)e^t$$

$$x(0) = 2$$

بنابراین $x(t)$ در معادله دیفرانسیل صدق کرده است.

$$\frac{dy}{dt} = 3e^t + 2te^t + 2e^t = (5+2t)e^t$$

$$4x(t) - y(t) = 8e^t + 4te^t - 3e^t - 2te^t = (5+2t)e^t$$

$$y(0) = 3$$

پس توابع داده شده در معادله دیفرانسیل صدق می کند. و جواب معادله دیفرانسیل هستند.

با روش اویلر مقادیر y_i, x_i را محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0.1f(t_0, x_0, y_0) = 2 + 0.1(3x_0 - y_0) = 2 + 0.1(6-3) = 2.3 \\ y_1 = y_0 + 0.1g(t_0, x_0, y_0) = 3 + 0.1(4x_0 - y_0) = 3 + 0.1(8-3) = 3.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 0.1f(t_1, x_1, y_1) = 2.3 + 0.1(3x_1 - y_1) = 2.64 \\ y_2 = y_1 + 0.1g(t_1, x_1, y_1) = 3.5 + 0.1(4x_1 - y_1) = 4.07 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به h=0.1 خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_1 \approx x(0.1) = 2.3 \\ y_1 \approx y(0.1) = 3.5 \\ x_2 \approx x(0.2) = 2.64 \\ y_2 \approx y(0.2) = 4.07 \end{cases} \begin{cases} x(0.1) = 2.320858928 \\ y(0.1) = 3.536546938 \\ x(0.2) = 2.687086068 \\ y(0.2) = 4.152769378 \end{cases}$$

با مقایسه مقادیر واقعی و عددی مشاهده می کنیم که تقریبا تا یک رقم اعشار دقت داریم که می توان با اختیار h کوچکتر جواب را بهبود بخشید.

با روش رانگ-کوتا مرتبه چهار مقادیر y_i, x_i را بدست می آوریم.

$$h = 0.1, t_0 = 0, x_0 = 2, y_0 = 3$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4) \end{cases}$$

بطوریکه :

$$f_1 = f(t_0, x_0, y_0) = 3x_0 - y_0 = 3(2) - 3 = 3$$
$$g_1 = g(t_0, x_0, y_0) = 4x_0 - y_0 = 4(2) - 3 = 5$$
$$f_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} f_1, y_0 + \frac{h}{2} g_1) = 3.2$$
$$g_2 = g(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} f_1, y_0 + \frac{h}{2} g_1) = 5.53$$
$$f_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} f_2, y_0 + \frac{h}{2} g_2) = 3.2125$$
$$g_3 = g(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} f_2, y_0 + \frac{h}{2} g_2) = 5.3725$$
$$f_4 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + hf_3, y_0 + hg_3) = 3.21325$$
$$g_4 = g(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + hf_3, y_0 + hg_3) = 5.373875$$

همچنین مقادیر $x_i = 2.3173042$ و $y_i = 3.5303146$ با جای گذاری مقادیر f_iها و g_iها در رابطه y_i, x_i بدست می آیند و نشان می دهد که مقادیر بدست آمده از روش رانگ – کوتا نسبت به روش اویلر دارای دقت بهتری هستند.

15 الف- از $x(t)$، مشتقاتش را بدست می آوریم و در معادله دیفرانسیل قرار می دهیم.

$$x(t) = e^{-3t} + 4t + 4$$
$$x'(t) = -3e^{-3t} + 4, x''(t) = 9e^{-3t}$$
$$9e^{-3t} + 3(-3e^{-3t} + 4) = 12$$
$$x(0) = e^{0} + 4(0) + 4 = 5$$
$$x'(0) = -3e^{0} + 4 = 1$$

بنابراین $x(t)$ ارائه شده جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دو می باشد.

15- ب. با اختیار $x'(t) = y(t)$ معادله دیفرانسیل را به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می کنیم.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y = f(t, x, y), x(0) = 5 \\ \frac{dy}{dt} = 12 - 3y = g(t, x, y), y(0) = 1 \end{cases}$$

15- ج. محاسبه y_i, x_i توسط روش اویلر:

$$h = 0.1, t_0 = 0, t_1 = 0.1$$
$$\begin{cases} x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0, y_0) = 5 + 0.1y_0 = 5.1 \\ y_1 = y_0 + hg(t_0, x_0, y_0) = 1 + 0.1(12 - 3y_0) = 1.9 \end{cases}$$

مقدار واقعی:

$$\begin{cases} x(0.1) = e^{-0.3} + 4(0.1) + 4 = 5.140818221 \\ y(0.1) = -3e^{-0.3} + 4 = 1.77754533 \end{cases}$$

15-د. نقاط بصورت زیر هستند:

$$t_i = t_0 + ih, i = 1,2,...,40, h = 0.05, t_0 = 0$$

بنابراین داریم:

$$t_0 = 0, t_1 = 0.05,...., t_{40} = 2$$

مانند مثال 12-7 و بوسیله یک برنامه کامپیوتری مسئله را حل کنید.